

Formations & Techniques

# RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES

BUT, BTS,  
CPGE, Licences,  
Masters, Écoles  
d'ingénieurs

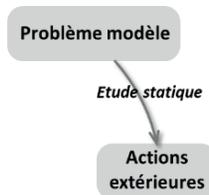
Mathieu Rossat



# Chapitre 2 : Équations d'équilibre global

L'étude statique qui passe par les équations d'équilibre global permet de déterminer les actions mécaniques extérieures et donc l'ensemble des inconnues de liaisons entre la poutre et le bâti.

C'est la deuxième étape de la démarche de dimensionnement en Résistance des matériaux.

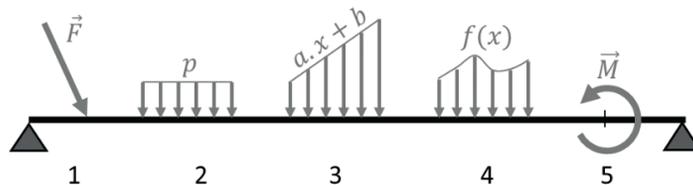


Avant de présenter le Principe Fondamental de la Statique (PFS), il est nécessaire de définir les types de charges que nous pourrions rencontrer et les liaisons standards utilisées en Résistance des matériaux.

# 1 Types de charge – Problème plan

## 1.1 Actions types

Les différents types d'actions mécaniques rencontrées sont les suivantes :



1. Force ponctuelle (en  $N$ )
2. Charge uniformément répartie  $p$  (en  $N/m$ )
3. Charge linéairement répartie  $p = a \cdot x + b$
4. Charge répartie décrite par une fonction quelconque  $f(x)$
5. Moment pur (en  $N \cdot m$ )

## 1.2 Actions à ne pas oublier sur les structures

A chaque étude, il faut se poser la question de l'existence ou non des charges suivantes :

- charges permanentes : poids propre
- charges d'exploitation : foule, neige, vent, ...
- charges dynamiques : vent, machines, ...
- charges exceptionnelles : inondations, chocs, séismes, ...

Afin de prendre en compte au mieux tous ces phénomènes le Comité Européen de Normalisation (CEN) a rédigé des Eurocodes en 1990. Ce sont des normes européennes de conception, de dimensionnement et de justification des structures de bâtiment et de génie civil, établissant un ensemble de règles techniques.

Il y a neuf Eurocodes définissant les normes pour différents types de constructions :

- Eurocode 0 : Bases de calcul
- Eurocode 1 : Actions sur les structures
- Eurocode 2 : Calcul des structures en béton

- Eurocode 3 : Calcul des structures en acier
- Eurocode 4 : Calcul des structures mixtes acier-béton
- Eurocode 5 : Calcul des structures en bois
- Eurocode 6 : Calcul des ouvrages en maçonnerie
- Eurocode 7 : Calcul géotechnique
- Eurocode 8 : Conception et dimensionnement des structures pour leur résistance aux séismes
- Eurocode 9 : Calcul des structures en alliages d'aluminium

## 2 Liaisons type – Problème plan

Une liaison mécanique entre deux solides est caractérisée par un contact physique. De ce contact dépend des libertés relatives de mouvement et des possibilités de transmission d'effort entre les pièces constituant la liaison.

### 2.1 Degrés de liberté

Un objet libre dans l'espace (le mouvement d'une abeille par exemple) peut se déplacer dans un repère quelconque  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  selon 6 mouvements indépendants :

#### 3 translations :

- $T_x$  : Translation suivant l'axe  $\vec{x}$
- $T_y$  : Translation suivant l'axe  $\vec{y}$
- $T_z$  : Translation suivant l'axe  $\vec{z}$

#### 3 rotations :

- $R_x$  : Rotation autour de l'axe  $\vec{x}$
- $R_y$  : Rotation autour de l'axe  $\vec{y}$
- $R_z$  : Rotation autour de l'axe  $\vec{z}$

Dans le cas d'un problème plan ( $\vec{x}, \vec{y}$ ) par exemple, seules les translations sur  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et la rotation autour de  $\vec{z}$  sont étudiées.

## 2.2 Inconnues de liaison

Dans le cadre du contact entre deux objets, il y a jusqu'à six actions mécaniques indépendantes.

### 3 forces :

- $F_x$  : Force suivant l'axe  $\vec{x}$
- $F_y$  : Force suivant l'axe  $\vec{y}$
- $F_z$  : Force suivant l'axe  $\vec{z}$

### 3 moments :

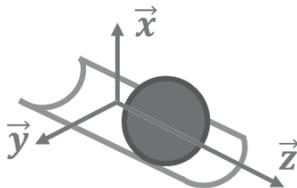
- $M_x$  : Moment autour de l'axe  $\vec{x}$
- $M_y$  : Moment autour de l'axe  $\vec{y}$
- $M_z$  : Moment autour de l'axe  $\vec{z}$

Si le problème est plan ( $\vec{x}, \vec{y}$ ), seules les forces sur  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et le moment autour de  $\vec{z}$  sont étudiés.

En Résistance des matériaux ce sont les inconnues de liaison qui sont cherchées. Les degrés de liberté peuvent être utilisés pour les déterminer. En effet, la somme du nombre d'inconnues de liaison et de degrés de liberté vaut toujours 6 dans le cas d'un problème 3D, et 3 dans le cas d'un problème plan.

## 2.3 Exemple

Soit une balle dans une gouttière (liaison linéaire annulaire) pour étudier les degrés de liberté et les inconnues de liaison.



Il y a quatre degrés de liberté :

- 1 Translation :  $Tz$  ( $Tx$  et  $Ty = 0$ )
- 3 Rotations :  $Rx, Ry, Rz$

Il y a deux inconnues de liaison :

- 2 Forces transmissibles :  $Fx, Fy$  ( $Fz = 0$ )
- Aucun moment transmissible : - ( $Mx, My$  et  $Mz = 0$ )

La somme du nombre de degrés de liberté et d'inconnues de liaison vaut six.

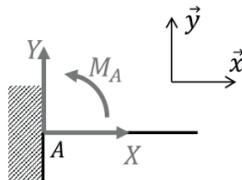
## 2.4 Liaison type dans le cas d'un problème plan

La modélisation des liaisons en Résistance des matériaux est légèrement différente que celle dans le cas de la mécanique des solides.

Pour toutes les liaisons types nous considérerons dans la résolution des problèmes de dimensionnement que les inconnues de liaison sont toujours dans le sens du repère. Les paramètres utilisés sont :

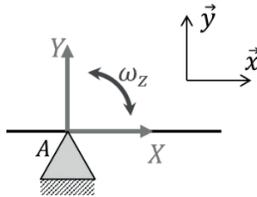
- $X$  : la force sur  $\vec{x}$
- $Y$  : la force sur  $\vec{y}$
- $M_A$  : le moment au point  $A$  autour de  $\vec{z}$

### 2.4.1 La liaison encastrement



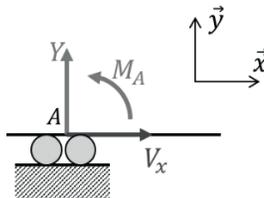
Il y a trois inconnues de liaison ( $X, Y$  et  $M_A$ ) et aucun degré de liberté.

### 2.4.2 La liaison pivot d'axe $\vec{z}$ , la liaison pivot glissant d'axe $\vec{z}$ et la liaison rotule



Il y a deux inconnues de liaison ( $X, Y$ ) et un seul degré de liberté ( $\omega_z$ ).

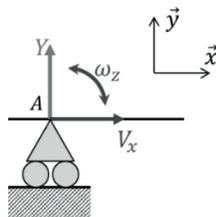
### 2.4.3 La liaison pivot glissant d'axe $\vec{x}$ et la liaison glissière d'axe $\vec{x}$



Il y a deux inconnues de liaison ( $Y$  et  $M_A$ ) et un seul de degré de liberté ( $V_x$ ).

Remarque : Cette liaison pourrait également être selon l'axe  $\vec{y}$ . Elle est très peu utilisée dans les faits.

### 2.4.4 Liaison ponctuelle



Il y a une seule inconnue de liaison ( $Y$ ) et deux degrés de liberté :  $V_x$  et  $\omega_z$

### 3 Le Principe Fondamental de la Statique (PFS)

#### 3.1 Statique galiléenne

Le principe fondamental de la mécanique galiléenne conduit au théorème suivant :

**Si un solide est en équilibre dans un référentiel galiléen, alors le torseur des actions mécaniques extérieures est constamment nul.**

Deux cas peuvent répondre à cette définition :

- **L'immobilité** d'un système dans un référentiel galiléen, c'est l'équilibre statique
- **La translation uniforme** d'un système dans un référentiel galiléen, c'est l'équilibre dynamique de translation

Il existe au moins un repère galiléen tel que pour tout ensemble matériel ( $E$ ) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur des actions mécaniques extérieures à ( $E$ ) est égal au torseur nul. Il en découle les relations suivantes :

$$\sum \overrightarrow{F_{E/E}} = \vec{0}$$

$$\sum \overrightarrow{M_{O,E/E}} = \vec{0}$$

#### 3.2 Remarques

##### Remarque 1 :

La réciproque du Principe fondamental de la statique n'est pas forcément vraie :

$$\left\{ \tau_{E/E} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \not\Rightarrow (E) \text{ n'est pas forcément en équilibre}$$

Effectivement dans le cas d'une paire de ciseaux dont le poids est négligeable, l'action mécanique sur l'oreille de droite a la même intensité que celle sur l'oreille de gauche de telle sorte que la somme des actions mécaniques soit nulle. Pour autant, les ciseaux s'ouvrent et il y a donc mouvement.



**Remarque 2 :**

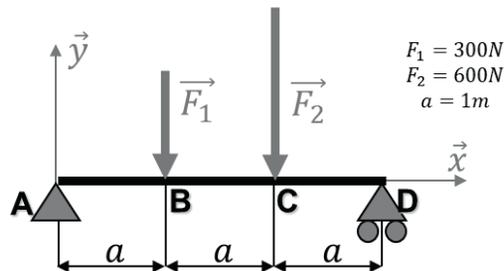
Dans 99,99 % des cas, il est avantageux de commencer par la somme des moments. En effet nous sommes sûrs dans cette approche de ne pas perdre de temps (pas forcément d'en gagner) alors qu'en commençant par la somme des forces il est possible d'en perdre.

## 4 Exercices d'application

### 4.1 Exercice 1 : Charges ponctuelles

La structure ci-dessous est en liaison pivot d'axe  $\vec{z}$  en A, en liaison ponctuelle d'axe  $\vec{y}$  en D et est sollicitée par deux forces ponctuelles  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  respectivement en B et C.

Déterminer les actions de liaisons.



#### Isolons {la poutre}

Il faut toujours préciser l'ensemble isolé. C'est le sésame pour la suite !

#### Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (B.A.M.E.)

Il faut représenter dans un premier temps les actions mécaniques au niveau des liaisons (cf. ci-après) puis traduire la représentation graphique par des torseurs.