BL

1re et 2e années

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Jean-Paul Huvelin
Pascal Mano
Gianfranco Niffoi
Anne-Sophie Pierson-Fertel
Nicolas Pierson

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

FORMULAIRE MATHS

2e édition

Les 2 années
en 1 clin d'œil

ellipses

1. SOMMES ET PRODUITS

Somme des termes d'une suite constante

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$$

Somme des puissances des *n* premiers entiers

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Somme géométrique

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}}$$

Plus généralement : $\forall q \neq 1,\ \forall n \geq p,\ \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Distributivité et associativité

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (\lambda \text{ ne dépend pas de l'indice.})}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k}$$

Changement d'indice

Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.

Seuls les deux changements d'indice suivants sont autorisés :

- Changement d'indice : $i = k + m$ (avec m entier)

$$\sum_{k=p}^{n} x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$$

- Changement d'indice : $i = m - k$ (avec m entier supérieur ou égal à n)

$$\sum_{k=p}^{n} x_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} x_i$$

Télescopage

Quels que soient les réels $x_0, ..., x_{n+1}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x_{k+1} - x_k\right) = x_{n+1} - x_0$$

Interversion de sommes doubles

Si les indices sont indépendants :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\right)$$

Si les indices sont dépendants :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}$$

$$\sum_{1\leq i< j\leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}$$

Lien entre sommes simple et double

Quels que soient les réels $x_1,...,x_n$, avec n élément de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

Factorielle

Pour tout entier naturel n, on appelle *factorielle* de n, et on note $n!$, l'entier naturel défini par $0!=1$ et, pour tout entier naturel n non nul : $n!=\prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times ...\times n$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n! = n\times (n-1)!$.

Produit de termes d'une suite constante

$$\forall n\in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n} \lambda = \lambda^n$$

Opérations compatibles avec $\prod$

$$\forall n\in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n} \left(x_k y_k\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)$$

Si aucun des y_k n'est nul, alors : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\prod_{k=1}^{n} y_k}$

Télescopage

Si aucun des x_k n'est nul, on a :

$$\forall n\in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_0}$$

2. ENSEMBLES

Comparaison d'ensembles

On dit que l'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B.

On dit que deux ensembles A et B sont *égaux*, on note $A = B$, lorsque l'on a : $A \subset B$ et $B \subset A$.

On dit que l'ensemble A est une *partie* de l'ensemble E (ou encore un *sous-ensemble* de E) lorsque A est inclus dans E.
L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Intersection et réunion

L'*intersection* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

$$\boxed{x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B}$$

La *réunion* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles A ou B.

$$\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B}$$

Commutativité

L'intersection et la réunion sont commutatives :

$$\boxed{A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A}$$

Associativité

L'intersection et la réunion sont associatives :

$$\begin{array}{c} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \end{array}$$

Les ensembles considérés dans la suite sont tous des parties d'un ensemble Ω .

Élément neutre

Ω est élément neutre pour l'intersection : $A \cap \Omega = A$.
$\varnothing$ est élément neutre pour la réunion : $A \cup \varnothing = A$.

Inclusion, intersection et réunion

$$\boxed{A \cap B \subset A \text{ et } A \subset A \cup B}$$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

$$\boxed{A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A}$$

Distributivité

L'intersection et la réunion sont distributives l'une sur l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Complémentaire

Le *complémentaire* de A est l'ensemble, noté $\overline{A}$, contenant les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. On a : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

On a : $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{\varnothing} = \Omega$; $\overline{\Omega} = \varnothing$.
$\overline{A}$ est la seule partie de Ω vérifiant : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}}$$

Lois de Morgan

$$\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

Produit cartésien

On définit le *produit cartésien* des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ par :
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A_i \}$.
Le produit $A \times A$ est noté A^2.

Ensembles dénombrables, ensembles finis

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$.

Un ensemble E est dit *fini* s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul tel qu'il existe une bijection de E vers $[\![1, n]\!]$.
Le nombre n est appelé *cardinal* de E, noté $\mathrm{card}\,(E)$ ou $|E|$.
On a $\mathrm{card}\,(\varnothing) = 0$.

Les mathématiques peuvent être définies
comme une science dans laquelle on ne sait jamais
de quoi on parle ni si ce que l'on dit est vrai.

Bertrand Russel

3. APPLICATIONS

E, F et G désignent des ensembles.

Fonctions et applications

Une fonction f de E dans (ou vers) F est un procédé qui permet d'associer certains éléments de E avec des éléments de F appelés leurs images, de telle façon que tout élément x de E possède au maximum une image y dans F.

Une application f de E dans F est une fonction de E dans F telle que tout élément de E possède exactement une image par f dans F. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{A}(E, F)$.

Identité

On appelle *identité* de E (ou *application identique* de E), l'application de E dans E, notée Id_E et définie par :

$$\boxed{\forall x \in E,\ Id_E(x) = x}$$

Restriction d'une application

Soit f une application de E dans F et E' une partie de E. On appelle *restriction* de f à E', l'application notée $f_{|E'}$ définie par :

$$\boxed{\forall x \in E', f_{|E'}(x) = f(x)}$$

Composée d'applications

Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. On note $g \circ f$ (et on lit "g rond f") l'application de E dans G qui à tout élément x de E associe : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Lorsque les composées écrites ci-après existent, on a (associativité) :

$$\boxed{(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h}$$

Si f est une application de E dans F, on a :

$$\boxed{f \circ Id_E = Id_F \circ f = f}$$

Image directe, image réciproque

Soit f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle *image directe* de A par l'application f, l'ensemble $f(A)$, défini par :

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$$

Soit B une partie de F. On appelle *image réciproque* de B par l'application f, l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$, défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Injection

Une application f de E dans F est *injective* (ou est une *injection*) si chaque élément de F admet au plus un antécédent dans E par f.

Une application f de E dans F est injective si, et seulement si :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

Surjection

Une application f de E dans F est *surjective* (ou est une *surjection*) si chaque élément de F admet au moins un antécédent dans E par f.

Une application f de E dans F est surjective si et seulement si :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)}$$

Bijection

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une application *bijective* (on dit aussi une *bijection*) si elle est injective et surjective.
Une application f de E dans F est bijective si et seulement si :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)}$$

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection de E dans F si, et seulement si, il existe une application g de F dans E telle que :

$$\boxed{g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F}$$