2de

MATHÉMATIQUES

Pour ceux
qui ont besoin d'être rassurés

Jean-Louis **FROT**

ellipses

Chapitre 1

Ensembles et applications

La **logique** décrit les règles des **raisonnements**. Codifiée par Aristote au IVe siècle avant Jésus-Christ, elle est renouvelée par Antoine Arnauld et Pierre Nicole dans *La Logique ou l'art de penser* (1662).
La **théorie des ensembles** est récente, due à Georg Cantor (1845-1918) (photo ci-contre) et à son maître Richard Dedekind (1831-1916).
Les notions d'ensemble et d'élément ; les relations d'appartenance ($\in$) et d'égalité ($=$) ; les quantificateurs ($\forall$) et ($\exists$) ; les opérateurs logiques (et) (ou) (non) ($\Rightarrow$) sont pris ici au sens naïf.

1.1 Survol de la logique élémentaire

Pour plus de détails, on se reportera p. 27 du livre de troisième cité ci-dessous [1]. Soient E et F des énoncés logiques. Dire que l'implication :

$$E \Rightarrow F$$

est **vraie** signifie (au niveau élémentaire) que si E est vrai alors F est vrai.

$\boxed{E \Rightarrow F}$ revient à dire : pour que F soit vrai, **il suffit** que E soit vrai.
E vrai est une **condition suffisante** pour que F soit vrai

et encore : pour que E soit vrai, **il faut** que F soit vrai.
F vrai est une **condition nécessaire** pour que E soit vrai

Si on considère :

$$E \Rightarrow F$$

comme **implication directe**, alors :

$$F \Rightarrow E$$

est appelée **implication réciproque**. Parmi les deux implications $E \Rightarrow F$ et $F \Rightarrow E$ il se peut que l'une soit vraie et l'autre fausse. Si elles sont **toutes deux vraies** on écrit :

$$E \Leftrightarrow F$$

et on dit que les énoncés E et F sont **équivalents**.

1. J.-L. Frot : *Mathématiques - Classe de troisième - Pour ceux qui veulent comprendre*, Ellipses (2021).

Les connecteurs relient des énoncés logiques. Dire que l'énoncé $\boxed{F \textbf{ et } G}$ est vrai signifie que les énoncés F et G sont **vrais tous les deux à la fois**.

Dire que l'énoncé $\boxed{F \textbf{ ou } G}$ est vrai signifie que, parmi F et G, **l'un au moins est vrai**, c'est-à-dire, l'un est vrai, ou les deux sont vrais : le $\boxed{\textbf{ou}}$ n'est pas exclusif.

Du maître à son élève

Il faut comprendre la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, entre implication directe $\boxed{E \Rightarrow F}$ et équivalence $\boxed{E \Leftrightarrow F}$. Voici des exemples concrets d'implications qui ne sont pas des équivalences :

• Pour accomplir une grande œuvre, il faut du temps.

$$\boxed{\text{grande œuvre}} \quad \boxed{\Rightarrow} \quad \boxed{\text{temps}}$$

La réciproque est fausse car le temps seul ne produit pas une œuvre. Le temps est **nécessaire mais pas suffisant**.

• S'agissant de voyage à cheval, qui veut voyager loin ménage sa monture.

$$\boxed{\text{voyager loin}} \quad \boxed{\Rightarrow} \quad \boxed{\text{ménager sa monture}}$$

La réciproque est fausse car ménager sa monture ne suffit pas pour voyager loin, il faut bien d'autres choses. Ménager sa monture est **nécessaire mais pas suffisant**.

• Le bon vin réjouit le cœur de l'homme.

$$\boxed{\text{bon vin}} \quad \boxed{\Rightarrow} \quad \boxed{\text{cœur réjoui}}$$

La réciproque est fausse car le bon vin n'est pas nécessaire pour réjouir le cœur. Le bon vin est **suffisant mais pas nécessaire**.

• Il suffit d'un grain de sable pour que la mécanique se détraque.

$$\boxed{\text{sable}} \quad \boxed{\Rightarrow} \quad \boxed{\text{mécanique détraquée}}$$

La réciproque est fausse car la mécanique peut se détraquer pour d'autres raisons que le sable. Le sable est **suffisant mais pas nécessaire**.

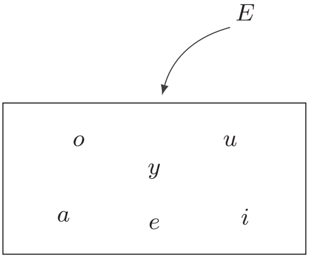
Tout ceci s'éclaircira progressivement cette année par l'étude des différents chapitres du cours et la pratique des exercices, par exemple l'ex. 27, p. 127.

1.2 Éléments de théorie des ensembles

Un ensemble est une **réunion d'éléments**. Si j'écris :

$$E = \{a, e, i, o, u, y\}$$

alors E est l'ensemble des voyelles de l'alphabet français. Les **éléments** de E sont a, e, i, o, u, y.
Le symbole $\in$ se lit "**appartient à**". L'énoncé suivant :



$$\boxed{i \in E}$$

se lit " i **appartient à** E ". Il signifie que i **est un élément de** E.

L'énoncé suivant :

$$\boxed{b \notin E}$$

se lit " b **n'appartient pas à** E ". Il signifie que b **n'est pas un élément de** E.

En géométrie, droites, segments, cercles, triangles, carrés, plans, cubes, sphères, etc. sont des **ensembles de points**. L'espace qui nous entoure est un ensemble de points.

Définition 1. *Soient* A *et* B *des ensembles. On désigne par* $A \cap B$ [prononcer "A inter B"] *l'ensemble des éléments* x *tels que :*

$$x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

L'ensemble $A \cap B$ *est appelé* ***intersection*** *de* A *et* B*.*

Définition 2. *Soient* A *et* B *des ensembles. On désigne par* $A \cup B$ [prononcer "A union B"] *l'ensemble des éléments* x *tels que :*

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$

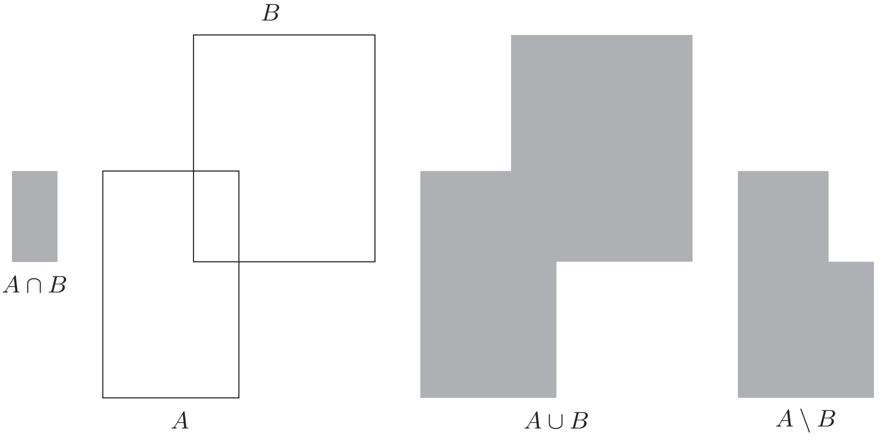
L'ensemble $A \cup B$ *est appelé* ***réunion*** *de* A *et* B*.*

Définition 3. *Soient* A *et* B *des ensembles. On désigne par* $A \setminus B$ [prononcer "A moins B"] *l'ensemble des éléments* x *tels que :*

$$x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B$$

L'ensemble $A \setminus B$ *est appelé* ***complémentaire*** *de* B *dans* A*.*

Pour illustrer ces opérations sur les ensembles, on peut s'aider de petites figures. Ici, on a représenté A et B par des rectangles. Les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ sont grisés :



Exercice 1.

1. On considère un carré $ABCD$, de diagonale $[AC]$, et le cercle de diamètre $[DC]$. Tracer côte à côte quatre exemplaires du carré et du cercle. On note $\mathscr{C}$ la surface de chaque **carré**, et $\mathscr{D}$ le **disque** de chaque cercle.
2. Colorier $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ sur la première figure, $\mathscr{C} \cup \mathscr{D}$ sur la deuxième, $\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}$ sur la troisième, $\mathscr{D} \setminus \mathscr{C}$ sur la quatrième figure.

Définition 4. *On dit qu'un ensemble A est* ***inclus*** *dans un ensemble B ou que A est une* ***partie*** *de B, et on écrit $A \subset B$* [prononcer "A inclus dans B"] *si tout élément de A est élément de B. On a donc :*

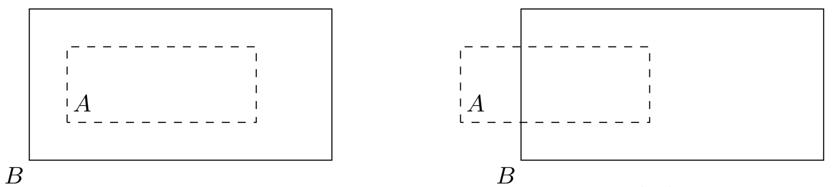
$$(A \subset B) \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

où le symbole $\boxed{\forall x}$ se lit "pour tout x".

Proposition 5. *Soient A et B des ensembles. On a :*

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x \ (x \in A \text{ et } x \notin B))$$

où le symbole $\boxed{\exists x}$ se lit "il existe x", c'est-à-dire, "il existe au moins un x".



$A \subset B$ $\qquad$ $A \not\subset B$

On a, par exemple, les inclusions suivantes entre ensembles de nombres (*voir* p. 13) :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Du maître à son élève

La partie de la théorie des ensembles qu'on utilise dans ce livre est réduite. Il s'agit surtout de distinguer par le vocabulaire, des notions assez communes (élément, partie, inclusion, intersection, etc.), et de comprendre des énoncés comme celui-ci :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Passée une période de réticence devant la nouveauté, le lecteur s'habituera et pourra constater, tout au long de ce livre, que le langage de la théorie des ensembles est commode.

Exercice 2.

On se place dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On considère les énoncés :

$$\forall a, \ \exists b, \ b > a \qquad\qquad \exists b, \ \forall a, \ b > a$$

1. Rédiger ces énoncés en français courant.
2. Dire si ces énoncés sont vrais ou faux. Justifier.

Définition 6. *Deux ensembles A et B sont dits égaux s'ils ont les mêmes éléments.*

Proposition 7. *Soient A et B des ensembles. On a :*

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

Axiome 8. *Il existe un ensemble qui n'a aucun élément. On l'appelle l'**ensemble vide**, et on le note $\emptyset$. On a donc :*

$$\forall x,\ x \notin \emptyset$$

Définition 9. *Soient A et B des ensembles. On dit qu'ils sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément commun, ce qui équivaut à :*

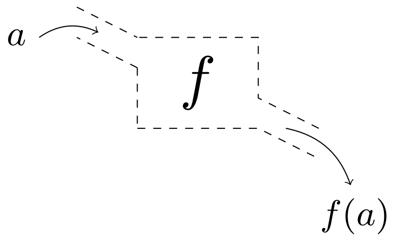
$$A \cap B = \emptyset$$

Un ensemble qui n'a qu'un élément a est appelé **singleton**. On le note $\{a\}$. Un ensemble qui a deux éléments est appelé **paire**, par exemple, si $a \neq b$, la paire $\{a, b\}$.

1.3 Applications

Définition 10. *Soient A et B des ensembles (non vides). Une **application** f de A dans B associe **à tout élément** $a \in A$ un élément **unique** noté $f(a)$, qui est dans B.*

On peut imaginer f comme une **machine** qui fabrique pour tout $\boxed{a \in A}$ une **image** notée $\boxed{f(a) \in B}$ Cette machine est représentée par le schéma suivant :

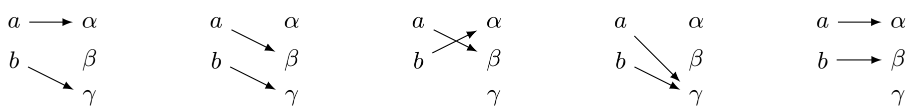


$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

ATTENTION ! f n'est pas un nombre $\boxed{f(a) \neq f \times a}$ f est une machine.

On dit que A est l'ensemble de départ de f et que B est l'ensemble d'arrivée de f. On dit aussi que f va de A dans B.

Voici cinq applications de $A = \{a, b\}$ dans $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$:



On voit bien que tous les éléments de A ont toujours une image unique.

Définition 11. *Soit f une application de A dans B, et soit $y \in B$. S'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$ on dit que x est un **antécédent** de y par f.*

Un élément $y \in B$ peut avoir zéro, ou un ou plusieurs antécédents par f. Examinons les cinq applications précédentes. On voit que sur la première et la quatrième, β n'a pas d'antécédent, alors que sur la deuxième, β a pour antécédent a.

Sur la quatrième, γ a deux antécédents a et b.

Définition 12. *Soit A un ensemble (non vide). L'**application identique** de A dans A est l'application notée* id *ou i ainsi définie :*

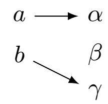
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ a & \mapsto & a \end{array}$$

Définition 13 (injection). *Une application f de A dans B est dite* ***injective*** *si tous les éléments de A ont des images* ***différentes*** *par f.*

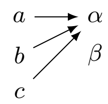
Définition 14 (surjection). *Une application f de A dans B est dite* ***surjective*** *si tous les éléments de B ont au moins un* ***antécédent*** *par f.*

Définition 15 (bijection). *Une application f de A dans B est dite* ***bijective*** *si elle est à la fois injective et surjective.*

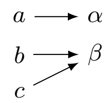
Voici des exemples :
Une application de $\{a, b\}$ dans $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ qui est injective mais non surjective :



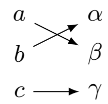
Une application de $\{a, b, c\}$ dans $\{\alpha, \beta\}$ qui est non injective et non surjective :



Une application de $\{a, b, c\}$ dans $\{\alpha, \beta\}$ qui est non injective mais qui est surjective :



Une application de $\{a, b, c\}$ dans $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ qui est injective et surjective, donc bijective :



Exercice 3.

1. Dessiner avec des flèches toutes les applications de l'ensemble $\{a, b, c\}$ dans l'ensemble $\{\alpha, \beta\}$. On vérifiera qu'il y en a 8.
2. Pourquoi aucune n'est injective ?
3. Vérifier qu'il y en a 6 qui sont surjectives.

On utilise aussi le vocabulaire suivant : une **injection** est une application injective, une **surjection** est une application surjective, une **bijection** est une application bijective.

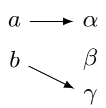
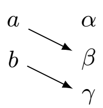
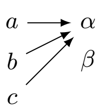
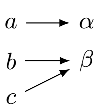
Proposition 16. *Une application de A dans B est bijective si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \beta \in B, \ \exists! a \in A, \ f(a) = \beta$$

Le symbole $\exists!$ signifie “il existe un **unique**”.

Du maître à son élève

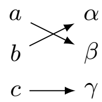
Les applications, bijections, injections, surjections ont des définitions assez abstraites. Mais des petits dessins comme ceux du cours :

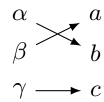
permettent d'y voir plus clair. Pour bien maîtriser ces notions, il faut s'entraîner en faisant des exercices, comme ex. 7, p. 33, et les suivants.

Définition 17 (réciproque)**.** *Si f de A dans B est bijective alors tout $\beta \in B$ admet un unique antécédent $a \in A$. Ceci définit une application notée f^{-1} de B dans A qu'on appelle la **réciproque** de f.*

Soit par exemple, la bijection ci-contre de $\{a, b, c\}$ dans $\{\alpha, \beta, \gamma\}$:



Sa **réciproque** est la bijection ci-contre de $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ dans $\{a, b, c\}$:



La réciproque f^{-1} de f est obtenue en **inversant le sens** de toutes les flèches. Si f est bijective, f^{-1} est aussi bijective. En fait f et f^{-1} sont réciproques l'une de l'autre.

1.4 Composition des applications

Définition 18. *Soient A, B et C des ensembles (non vides). Soient u et v des applications telles que :*

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

*La composée de u et v **dans cet ordre**, avec u **d'abord**, et v **ensuite**, est l'application notée $v \circ u$, définie par :*

$$\forall a \in A, \; (v \circ u)(a) = v(u(a))$$

On peut schématiser cette situation par le diagramme ci-contre. Bien noter que l'application $v \circ u$ va de A dans C.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] & B \arrow[r, "v"] & C \end{tikzcd}$$

Proposition 19 (associativité de la composition)**.** *Soient A, B, C et D des ensembles (non vides). Soient u, v et w des applications telles que :*

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D$$

On a :

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$$

que l'on note simplement $w \circ v \circ u$.

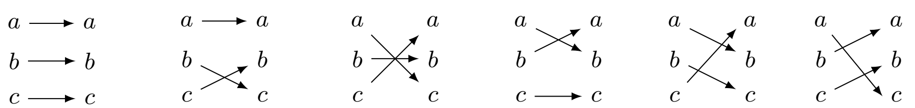
Proposition 20. *Si f est une bijection de A dans A et si f^{-1} est sa réciproque, on a :*

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i$$

1.5 Permutations

Définition 21. *Une bijection d'un ensemble dans lui-même est appelée **permutation**. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments.*

Voici les six permutations de l'ensemble a trois éléments $\{a, b, c\}$:



i=identité $\quad$ α transpos. $\quad$ β transpos. $\quad$ γ transpos. $\quad$ π permut. $\quad$ σ permut.

L'identité $\imath$ a trois points fixes. Les transpositions α, β, γ ont un seul point fixe. Les permutations circulaires π, σ n'ont aucun point fixe (*voir* ex. 13, p. 34).

Proposition 22. *La composée de deux permutations d'un ensemble est une permutation de cet ensemble.*

Ainsi, dans l'exemple précédent, on a $\alpha \circ \beta = \pi$ et $\beta \circ \alpha = \sigma$. On obtient une permutation d'un ensemble en choisissant un **ordre** pour énumérer ses éléments. Ainsi, pour l'ensemble $\{a, b, c\}$, l'identité est l'ordre (abc) ; la transposition α est l'ordre (acb) ; la transposition β est l'ordre (cba), etc.

Définition 23. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre* $n!$ [prononcer "n factorielle" ou ''factorielle n"] *est le produit de tous les entiers de n à 1 :*

$$1! = 1 \times 1 = 1 \qquad 2! = 2 \times 1 = 2 \qquad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \qquad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

On pose $\boxed{0! = 1}$. La suite des factorielles croît très vite ; ainsi $10! = 3\ 628\ 800$.

Proposition 24. *Le nombre de permutations d'un ensemble ayant n éléments est* $n!$

Ainsi, il y a 24 permutations d'un ensemble ayant 4 éléments. Pour les classer, notons $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble. Les notations classiques sont les suivantes :

- (ab) la permutation définie par : $a \to b \quad b \to a \;;\; c \to c \quad d \to d$
- $(ab)(cd)$ la permutation définie par : $a \to b \quad b \to a \quad c \to d \quad d \to c$
- $(abcd)$ la permutation définie par : $a \to b \quad b \to c \quad c \to d \quad d \to a$
- (bcd) la permutation définie par : $b \to c \quad c \to d \quad d \to b \;;\; a \to a$

Voici les 24 permutations annoncées :

1. L'identité : id
2. Les transpositions : (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd)
3. Les doubles transpositions : $(ab)(cd)$, $(ac)(bd)$, $(ad)(bc)$
4. Les permutations circulaires : $(abcd)$, $(abdc)$, $(acbd)$, $(acdb)$, $(adbc)$, $(adcb)$
5. Les permutations circulaires partielles : (bcd), (bdc), (acd), (adc), (abd), (adb), (abc), (acb)

On a bien :

$$1 + 6 + 3 + 6 + 8 = 24$$

Par ailleurs, $(ab)(cd)$ est en fait $(ab) \circ (cd)$. On peut montrer que toutes les permutations d'un ensemble sont des **composées de transpositions**. Par exemple :

$$(abc) = (cb)(ca) \qquad \text{et} \qquad (abcd) = (da)(ba)(cb)$$

1.6 Exercices

Exercice 4.

1. On considère un carré $ABCD$, de diagonale $[AC]$, et le cercle de centre A et de rayon $[AB]$. Tracer quatre exemplaires du carré et du cercle. On note $\mathscr{C}$ la surface de chaque **carré**, et $\mathscr{D}$ le **disque** de chaque cercle.
2. Colorier $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ sur la première figure, $\mathscr{C} \cup \mathscr{D}$ sur la deuxième, $\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}$ sur la troisième, $\mathscr{D} \setminus \mathscr{C}$ sur la quatrième.

Exercice 5.

1. Soient un triangle équilatéral ABC, et I milieu de $[AB]$. Soient les points D et E, tels que $CIDE$ soit un carré. Tracer quatre exemplaires du triangle et du carré. On note $\mathscr{T}$ l'intérieur de chaque **triangle**, et $\mathscr{C}$ l'intérieur de chaque **carré**.