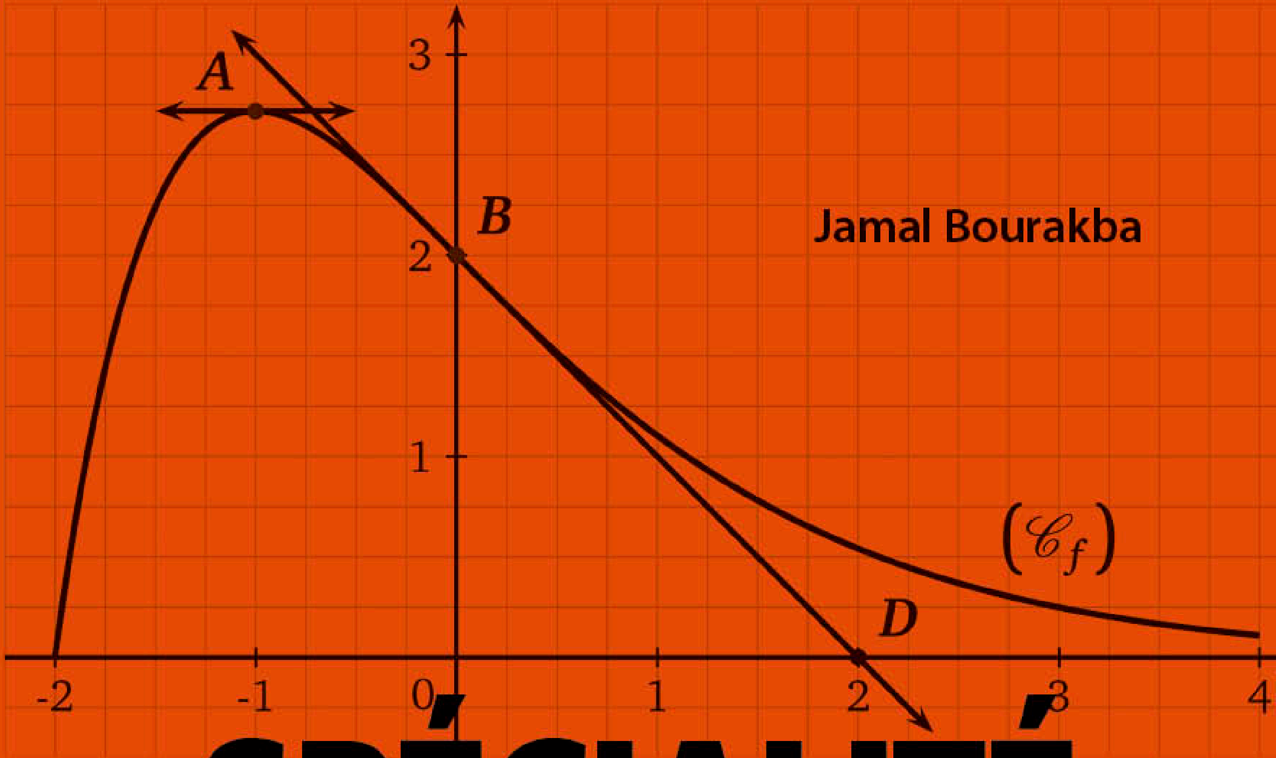
TERMINALE



Jamal Bourakba

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

- COURS COMPLET ET EXEMPLES DÉTAILLÉS
- MÉTHODES
- UN ENTRAÎNEMENT À PYTHON
- 300 EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

$$u_n = \frac{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n}{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$$

ellipses

Chapitre 1

Les suites

1.1 Généralités sur les suites (rappels de 1re)

Définition 1.1.1

Une suite (u_n) est une fonction définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note (u_n) : $\begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n \end{cases}$

!

- u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).
- Attention donc à bien faire la différence entre (u_n) (la suite) et u_n (un seul terme).
- On pourra noter indifféremment (u_n) ou tout simplement u.

Variations, monotonie d'une suite

Définition 1.1.2

Soit (u_n) une suite. On dit que :

a) *la suite (u_n) est* ***croissante*** *si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant u_{n+1}$;*

b) *la suite (u_n) est* ***décroissante*** *si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant u_{n+1}$;*

c) *la suite (u_n) est* ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante ;*

d) *la suite (u_n) est* ***constante*** *si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n$.*

! Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes : $u_n = (-1)^n$.

Dans la pratique, les méthodes de détermination de la monotonie d'une suite proposées à la page suivante reposent sur les définitions précédentes.

◆ Méthodes de détermination du sens de variation d'une suite

MÉTHODE 1 – SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n), on peut utiliser l'une des règles suivantes :

a) On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

- Si $u_{n+1} - u_n$ est positive, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n$ est négative, alors la suite (u_n) est décroissante.

b) Si tous les termes de la suite sont **strictement positifs**, alors il suffit de comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

c) Si la suite (u_n) est définie explicitement : $u_n = f(n)$, alors il suffit d'étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$. La suite (u_n) et la fonction f ont le même sens de variation.

d) On utilise un raisonnement par récurrence (voir **section 2**).

! Il est bien évident que chacune de ces méthodes est adaptée au type de suite à laquelle nous serons confrontés.

Exemple

Déterminer le sens de variation des suites suivantes en utilisant la règle la mieux adaptée.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n^2 + 3n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$.

c) Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$.

---

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2 + 3(n+1) - (-n^2 + 3n) = -2n + 2 = -2(n-1).$$

Or $-2(n-1) \leqslant 0$ dès que $n \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante pour $n \geqslant 1$.

b) Ici on étudie le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Ici, tous les termes u_n sont strictement positifs, donc pour tout $n \geqslant 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{3^{n+2}}{2^{n+1}}}{\dfrac{3^{n+1}}{2^n}} = \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{3}{2} \geqslant 1.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

c) On a $u_n = f(n)$ où $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$. La fonction f est dérivable sur $\left[0; +\infty\right[$ et pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left[0; +\infty\right[$.
On déduit que la suite (u_n) est aussi strictement croissante.

1.2 Le raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence

Ce principe de démonstration par récurrence s'applique lorsqu'on cherche à démontrer qu'une propriété $\mathscr{P}_n$ dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, n_0 étant un entier naturel donné.

Principe du raisonnement par récurrence 1.2.1

On considère une propriété $\mathscr{P}_n$. Pour démontrer que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on procède en trois étapes :

A) ***Initialisation*** *: on montre que la propriété est vraie pour $n = n_0$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie.*

B) ***Hérédité*** *: on démontre que :*

si *la propriété est vraie pour un entier $k \geqslant n_0$,* ***alors*** *elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$.*
Autrement dit ***si*** *$\mathscr{P}_k$ est vraie* ***alors*** *$\mathscr{P}_{k+1}$.*

C) ***Conclusion*** *:*

- *la propriété est initialisée,*
- *elle est héréditaire.*

Par conséquent[a] *$\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.*

a. Il est primordial que les **deux** conditions de ce principe soient réunies !

Exemple

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+2} + 3$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}_n$: « $u_n = 2^{n+2} + 3$ »

■ **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a (par définition) $u_0 = 7$ et $2^{0+2} + 3 = 4 + 3 = 7$.
Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

■ **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On supposons que $\mathscr{P}_k$ est vraie (i.e $u_k = 2^{k+2}+3$). Démontrons alors que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie (i.e $u_{k+1} = 2^{k+3} + 3$).

On a par définition de u_{k+1} et par hypothèse de récurrence :

$$u_{k+1} = 2u_k - 3 = 2\left(2^{k+2} + 3\right) - 3 = 2 \times 2^{k+2} + 6 - 3 = 2^{k+3} + 3$$

Donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

■ **Conclusion :** la propriété est initialisée et de plus héréditaire. Donc, en vertu du principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+2} + 3$.

1.3 Limite d'une suite

On s'intéresse dans cette section au comportement d'une suite pour les très grandes valeurs de l'entier n (lorsque n tend vers l'infini). On parlera ainsi de la limite d'une suite (u_n) et on notera :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n}$$

■ Limite infinie

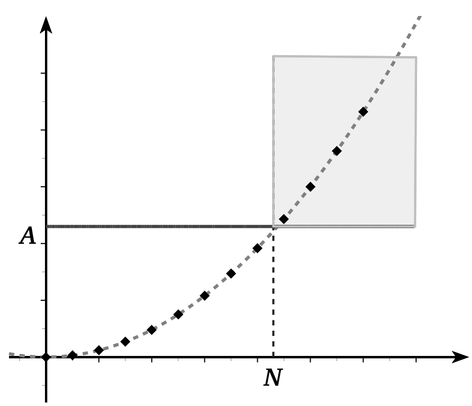
Définition 1.3.1

On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]A; \infty[$ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang N.

On note alors :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

*On dit que la suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$.*



! Une suite peut ne pas avoir de limite. On dit qu'elle diverge. Par exemple $u_n = (-1)^n$.

◆ Limites de référence

Propriété 1.3.2

Les suites suivantes ont pour limite $+\infty$.

a) $u_n = n$ b) $v_n = n^2$ c) $w_n = n^k$ $(k \geqslant 1)$ d) $r_n = \sqrt{n}$

■ Limite finie

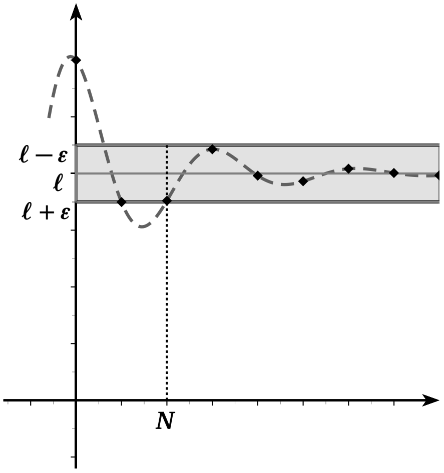
Définition 1.3.3

On dit que la suite (u_n) *a pour limite* ℓ *si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant* ℓ *contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang* N. *Un intervalle ouvert contenant* ℓ *est de la forme* $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ *où* $\varepsilon > 0$. *On note alors :*

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell}$$

On dit que la suite ***converge*** *vers*[a] ℓ.

a. Lorsqu'elle existe, cette limite est unique.



◆ Limites de référence

Propriété 1.3.4

Les suites suivantes ont pour limite 0.

a) $u_n = \dfrac{1}{n}$ b) $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ c) $w_n = \dfrac{1}{n^k}$ $(k \geqslant 1)$ d) $r_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

■ Limites par comparaison

Théorème 1.3.5

Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).

a) ***Théorème d'encadrement (dit des « gendarmes ») :***

$$\textit{Si} \begin{cases} v_n \leqslant u_n \leqslant w_n & (\textit{à partir d'un certain rang}) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L \\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L \end{cases} \quad \textit{alors} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L.$$

b) ***Théorème de comparaison***

- *Si $u_n \geqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.*
- *Si $u_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.*

Démonstration

On démontre ici le premier point du **b)**.

Supposons qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on ait $u_n \geqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
Soit A un réel, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ signifie qu'il existe un entier N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$ on ait $v_n > A$.

$$\begin{cases} \text{si } n \geqslant N_0 \text{ alors } u_n \geqslant v_n \\ \text{si } n \geqslant N_1 \text{ alors } v_n > A \end{cases} \quad \text{donc si } n \geqslant \max(N_0, N_1) \text{ alors } u_n \geqslant v_n > A.$$

On a donc trouvé un rang $N = \max(N_0, N_1)$ à partir duquel tous les termes u_n sont dans l'intervalle $]A\,;\,+\infty[$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. ■

Exemple

a) Démontrer que la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{n+3}$ est convergente.

b) Montrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = 3n + \sin(n)$ diverge vers $+\infty$.

a) La suite $(\cos(2n))$ n'a pas de limite, on va donc chercher à la « contrôler ». On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos(2n) \leqslant 1$, ainsi :

$$-\frac{1}{n+3} \leqslant \frac{\cos(2n)}{n+3} \leqslant \frac{1}{n+3}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0$, alors par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(2n)}{n+3} = 0$$

b) De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(n) \geqslant -1$, donc $3n + \sin(n) \geqslant 3n - 1$. Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n - 1 = +\infty$, alors par comparaison

$$\lim_{n\to+\infty} 3n + \sin(n) = +\infty$$

■ Limites et opérations

La notion de limite est compatible avec les opérations élémentaires (somme, produit et quotient). Dans certains cas, nous serons confrontés à ce que l'on appelle des **formes indéterminées** [1] (**F.I**).

$$\boxed{\infty - \infty} \quad ; \quad \boxed{0 \times \infty} \quad ; \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \quad ; \quad \boxed{\frac{0}{0}}$$

◆ Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Exemple

Déterminer la limite des suites suivantes :

a) $u_n = -5n + 1 + \frac{7}{n}$

b) $v_n = \frac{2}{\sqrt{n}} + \pi - \frac{1}{n}$

1. Cela ne signifie pas que la limite n'existe pas, mais qu'*a priori*, on ne peut pas se prononcer.

a) On a successivement

- $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n+1=-\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n}=0$

Ainsi, par somme :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$$

b)
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}}=0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi-\dfrac{1}{n}=\pi$

Ainsi, par somme :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\pi$$

◆ Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell\neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n\times v_n)$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	∞	F.I	∞

Exemple

Déterminer la limite de la suite suivante :

$$w_n=3n^2-5n+1$$

Ici, on a une forme indéterminée du type $\infty-\infty$; dans ce cas, il convient de factoriser le terme w_n par le terme $3n^2$.

$$w_n=3n^2\left(1-\frac{5}{3n}+\frac{1}{3n^2}\right)$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2=+\infty$. De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{3n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3n^2}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{5}{3n}+\dfrac{1}{3n^2}=1$ et ainsi par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n=+\infty.$$