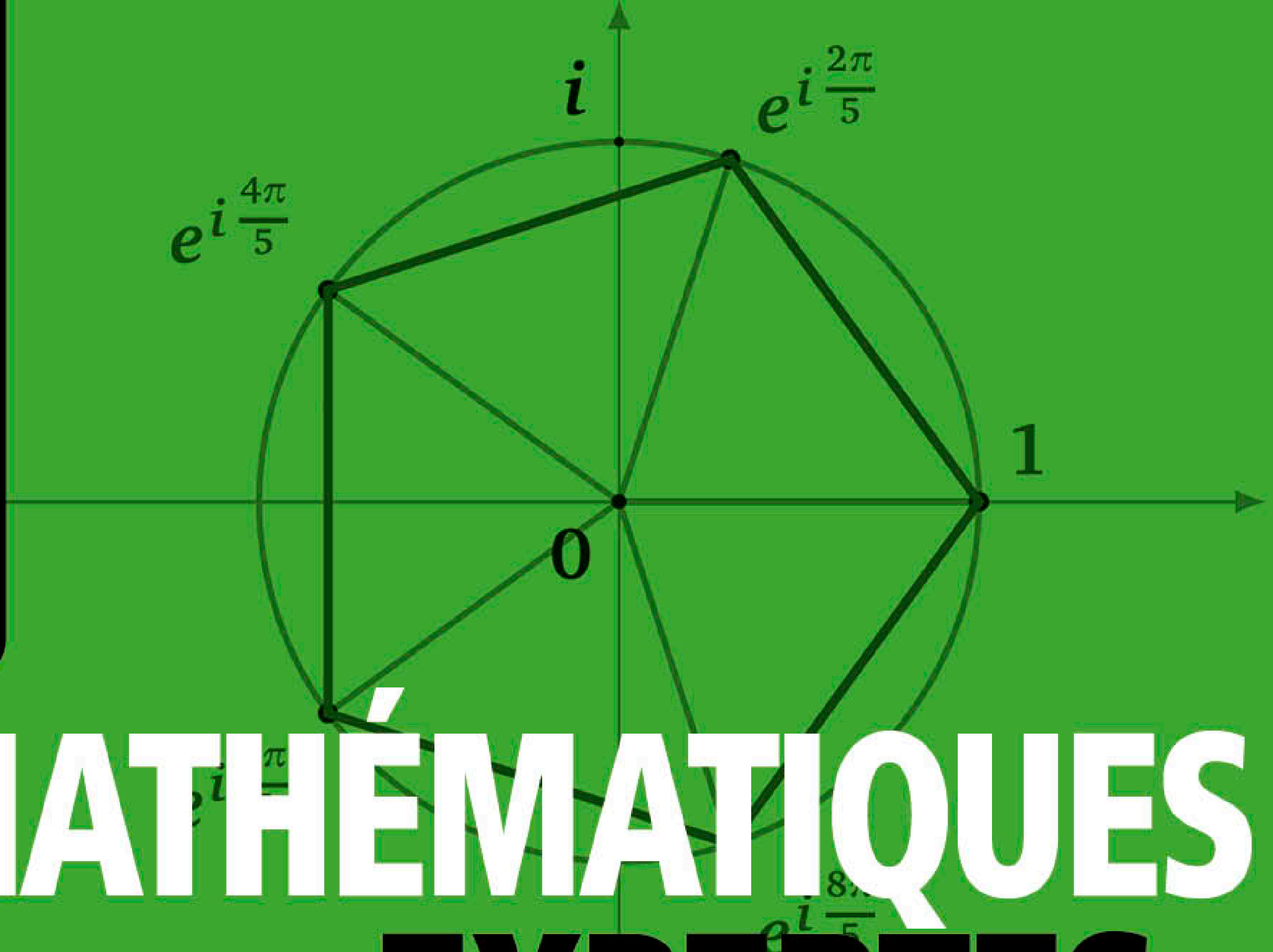
TERMINALE



MATHÉMATIQUES EXPERTES

Jamal Bourakba

- COURS COMPLET ET EXEMPLES DÉTAILLÉS
- MÉTHODES
- UN ENTRAÎNEMENT À PYTHON
- 240 EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

$$D^n = \operatorname{diag}\left(a_1^n, a_2^n, \ldots, a_m^n\right) = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_m^n \end{pmatrix}.$$

ellipses

CHAPITRE 1

Nombres complexes : point de vue algébrique

1.1 Ensemble des nombres complexes

Le nombre i

Définition 1.1.1

On admet qu'il existe un nombre imaginaire $\boldsymbol{i}$ *(non réel) défini par* $\boxed{i^2 = -1}$.
L' ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$*, est l'ensemble des nombres de la forme*

$$\boxed{z = x + iy}$$

avec x *et* y *réels.*

Forme algébrique d'un nombre complexe

Vocabulaire et définitions

- *L' écriture* $z = x + iy$ *avec* x *et* y *réels est appelée* **forme algébrique** *du nombre complexe* z.
- *Dans ce cas,* x *est appelé* ***partie réelle*** *de* z *et notée* $\mathbf{Re}(z)$ *et* y ***partie imaginaire*** *de* z *et notée* $\mathbf{Im}(z)$.
- z *est* ***réel*** *si, et seulement si,* $y = \mathbf{Im}(z) = 0$
- *On dit que* z *est* **imaginaire pur** *si, et seulement si,* $x = \mathbf{Re}(z) = 0$

! Les nombres $\mathbf{Re}(z)$ et $\mathbf{Im}(z)$ sont des nombres **réels**.

Exemple

Si $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$, alors $\mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

■ Égalité de deux nombres complexes

Théorème 1.1.2

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. Ce qui peut se traduire par :

$$\boxed{x + iy = x' + iy' \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}}$$

Cas particulier : un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes les deux nulles.

! L'équivalence précédente traduit le fait que la forme algébrique d'un nombre complexe est unique.

1.2 Opérations sur les nombres complexes

■ Addition, multiplication

Propriété 1.2.1

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes avec x, y, x', y' des réels. Alors

1) $z + z' = (x + x') + i(y + y')$

2) $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Exemple

a) $(2 + 3i) + (5 + 7i) = 7 + 10i$.

b) Si $z = 2 + 3i$ et $z' = 7 + 2i$.

Alors $zz' = (2 + 3i)(7 + 2i) = 14 + 4i + 21i + 6i^2 = 8 + 25i$ car $i^2 = -1$.

■ Opposé d'un nombre complexe

Définition 1.2.2

Soit $z = x + iy$ *un nombre complexe avec* x, y *réels. On appelle* ***opposé*** *de* z *le nombre complexe* $-z = -x - iy$.

■ Soustraction

Propriété 1.2.3

Soient $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$ *deux nombres complexes avec* x, y, x', y' *des réels. Alors* $z - z' = (x - x') + i(y - y')$.

■ Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.2.4

Soit $z = x + iy$ *où* x, y *sont réels. On appelle* ***conjugué*** *de* z *et on le note* $\overline{z}$ *le nombre complexe défini par :* $\overline{z} = x - iy$.

Exemple

a) $\overline{2+3i} = 2 - 3i$;

b) $\overline{-7i+5} = 5 + 7i$.

Propriété 1.2.5

Pour tous nombres complexes z *et* z' :

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.
- $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}$[a] $\iff \overline{z} = -z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- *Pour tout entier* n , $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$.

a. Signifie z est imaginaire pur.

Démonstration

On considère deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' des réels.

- On a $\overline{z} = x - iy$ donc $\overline{\overline{z}} = x + iy = z$.
- $z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$.
- $z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\mathrm{Im}(z)$.
- $z = \overline{z} \iff x + iy = x - iy \iff y = 0 \iff z = x \in \mathbb{R}$.
- $z = -\overline{z} \iff x + iy = -x + iy \iff x = 0 \iff z = iy \in i\mathbb{R}$.
- $\overline{z + z'} = \overline{(x + x') + i(y + y')} = (x + x') - i(y + y') = (x - iy) + (x' - iy') = \overline{z} + \overline{z'}$.
- D'une part

$$\overline{zz'} = \overline{(xx' - yy') + i(xy' + x'y)} = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$$

et d'autre part

$$\overline{z}.\overline{z'} = (x - iy)(x' - iy') = xx' - ixy' - ix'y + i^2yy' = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$$

donc $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$.

- On peut démontrer la dernière propriété par récurrence dans le cas où $n \in \mathbb{N}$. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathscr{P}_n \quad : \quad \overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}.$$

  - **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $\overline{z}^0 = 1$ et $\overline{z^0} = \overline{1} = 1$. Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
  - **Hérédité :** fixons un entier naturel n tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie, c'est-à-dire $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$ et montrons alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire $\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^{\,n+1}$.
  On a
  $$\overline{z^{n+1}} = \overline{z.z^n} = \overline{z}.\overline{z^n} \underbrace{=}_{\text{H.R}} \overline{z}.\overline{z}^{\,n} = \overline{z}^{\,n+1}.$$
  Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
  - **Conclusion :** la propriété est initialisée et de plus héréditaire, donc en vertu du principe de récurrence,
  $$\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N} \quad : \quad \overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}.$$

Inverse et quotient

Inverse

Définition 1.2.6

*Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul où x, y sont des réels. L'**inverse de** z est le nombre complexe*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Exemple

Écrivons $Z = \dfrac{1}{2-3i}$ sous forme algébrique.

$$Z = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

! On remarquera que pour tous réels x et y, $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ et donc que pour tout nombre complexe z, $z.\overline{z}$ est un nombre réel positif.

Quotient

Définition 1.2.7

*Soient $z = x+iy$ un nombre complexe non nul et $z' = x'+iy'$ où x, y, x', y' sont des réels. Le **quotient** de z' par z est le nombre complexe*

$$\frac{z'}{z} = \frac{x'+iy'}{x+iy} = \frac{(x'+iy')(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{xx'+yy'}{x^2+y^2} + i\frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}.$$

Quotient et conjugaison

Propriété 1.2.8

Si $z \neq 0$, alors

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}.$$

■ Résolution d'équations

Exercice résolu

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(2+3i)z = -1+5i$. 2) $(-1+2i)\overline{z}+4-i=0$.

1) Il suffit d'isoler z :

$$(2+3i)z = -1+5i \iff z = \frac{-1+5i}{2+3i} \iff z = \frac{(-1+5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = 1+i.$$

La solution de l'équation est $z = 1+i$. Donc

$$\mathscr{S} = \{1+i\}.$$

2) Même démarche, on détermine $\overline{z}$ puis z avec $z = \overline{\overline{z}}$:

$$(-1+2i)\overline{z}+4-i=0 \iff \overline{z} = \frac{-4+i}{-1+2i} = \frac{(-4+i)(-1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{6}{5}+\frac{7}{5}i$$

d'où :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{6}{5}-\frac{7}{5}i\right\}.$$

Exercice résolu

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (E) : $(2-i)z+(5+2i)\overline{z} = -2+4i$.

Dans cette équation, z et $\overline{z}$ interviennent. La méthode consiste à passer par la forme algébrique de z. On pose alors $z = x+iy$ avec x, y réels. Pour trouver z, il suffit alors de trouver x et y. Tout d'abord, il faut écrire les deux membres sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} (E) \quad &\iff \quad (2-i)(x+iy)+(5+2i)(x-iy) = -2+4i \\ &\iff \quad 7x+3y+i(x-3y) = -2+4i \end{aligned}$$

Or d'après le théorème relatif à l'égalité de deux nombres complexes :

$$(2-i)z+(5+2i)\overline{z} = -2+4i \iff \begin{cases} 7x+3y = -2 \\ x-3y = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7(4+3y)+3y=-2 \\ x=4+3y \end{cases} \iff \begin{cases} 24y=-30 \\ x=4+3y \end{cases},$$

et donc

$$(E) \iff \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Par suite $z=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$ est la solution de l'équation proposée. Donc

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i\right\}$$

1.3 Équations polynomiales de degré n ($n \geqslant 3$)

■ Polynôme et équation polynomiale

Définition 1.3.1

Soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *des nombres réels. On appelle*

- *Polynôme de degré* n *à coefficients réels un polynôme défini pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *par*

$$P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

- *Équation polynômiale de degré* n *à coefficients réels une équation d'inconnue* $z \in \mathbb{C}$ *de la forme*

$$P(z)=0$$

  où P *est un polynôme de degré* n.

■ Racine d'un polynôme

Définition 1.3.2

Soit P *un polynôme à coefficients réels de degré supérieur ou égal à* 1 *et* $\alpha \in \mathbb{C}$. *On dit que* α *est une* ***racine***[a] *de* P *si* $P(\alpha)=0$.

a. On dira également que α est solution de l'équation polynomiale $P(z)=0$.

Exemple

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$. Alors P admet i pour racine car

$$P(i) = i^3 - 2i^2 + i - 2 = -i + 2 + i - 2 = 0.$$

■ Équations du second degré

■■ Racines carrées d'un nombre réel dans $\mathbb{C}$

Définition 1.3.3

*Soit a un nombre réel. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = a$ sont appelées **racines carrées de a dans** $\mathbb{C}$.*

Propriété 1.3.4

*Tout nombre réel non nul a admet **deux racines carrées** dans $\mathbb{C}$. On considère l'équation $(E)\ :\ z^2 = a$.*

- *Si $a > 0$, les racines carrées de a sont les réels $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.*
- *Si $a < 0$, les racines carrées de a sont les **nombres complexes conjugués***

$$z_1 = i\sqrt{-a} \quad \text{et} \quad z_2 = -i\sqrt{-a}.$$

Démonstration

- Si $a > 0$. Alors

$$\begin{aligned} z^2 = a \iff z^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0 &\iff \left(z - \sqrt{a}\right)\left(z + \sqrt{a}\right) = 0 \\ &\iff z = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{a}. \end{aligned}$$

- Si $a < 0$. Alors

$$\begin{aligned} z^2 = a \iff z^2 = \left(i\sqrt{-a}\right)^2 &\iff \left(z - i\sqrt{-a}\right)\left(z + i\sqrt{-a}\right) = 0 \\ &\iff z = i\sqrt{-a} \quad \text{ou} \quad z = -i\sqrt{-a}. \end{aligned}$$

■