

Maurice Kibler

Licence

Fiches et exercices corrigés de mathématiques

Licence en alternance ou professionnelle ou
en sciences physiques



ellipses

Table des matières

1	Nombres complexes	1
I	Fiche 1 : représentation cartésienne d'un complexe	1
1	Définition d'un nombre complexe	1
2	Structure de corps pour \mathbb{C}	1
3	Conjugué d'un nombre complexe	2
4	Module d'un nombre complexe	3
5	Interprétation géométrique d'un nombre complexe	3
II	Fiche 2 : représentations polaires d'un complexe	3
1	Représentation trigonométrique	4
2	Formules d'Euler	4
3	Représentation exponentielle	5
4	Intérêt des représentations polaires et cartésiennes	5
III	Exercices corrigés	7
2	Décomposition en éléments simples	23
I	Fiche 1 : division euclidienne de polynômes	23
1	Théorème 1 (division de polynômes)	23
2	Méthodes pour la division	24
II	Fiche 2 : décomposition sur \mathbb{C}	24
1	Théorème 2 (décomposition en éléments simples)	24
2	Règle pratique	25
III	Fiche 3 : décomposition sur \mathbb{R}	27
1	De la décomposition sur \mathbb{C} à celle sur \mathbb{R}	27
2	Règle pratique	28
IV	Exercices corrigés	30
3	Trigonométries	49
I	Fiche 1 : trigonométrie sphérique	49
1	Définition des fonctions circulaires	49
2	Propriétés élémentaires des fonctions circulaires	51

3	Formules d'addition des fonctions circulaires	51
4	Formules de linéarisation des fonctions circulaires	53
5	Linéarisation de $\cos^2 a$, $\sin^2 a$ et $\sin a \cos a$	53
6	Corollaire des formules de linéarisation	54
7	Formules de l'arc moitié	54
8	Dérivées des fonctions circulaires	55
9	Tableaux de variations des fonctions circulaires	55
10	Séries entières des fonctions circulaires	55
11	Application aux développements limités	57
12	Formules d'Euler et de Moivre	57
13	Fonctions inverses des fonctions circulaires	58
II	Fiche 2 : trigonométrie hyperbolique	59
1	Définition des fonctions hyperboliques	59
2	Propriétés élémentaires des fonctions hyperboliques	59
3	Formules d'addition des fonctions hyperboliques	60
4	Formules de linéarisation des fonctions hyperboliques	60
5	Linéarisation de $\cosh^2 a$, $\sinh^2 a$ et $\sinh a \cosh a$	61
6	Corollaire des formules de linéarisation	61
7	Formules de l'argument moitié	61
8	Dérivées des fonctions hyperboliques	62
9	Tableaux de variations des fonctions hyperboliques	62
10	Séries entières des fonctions hyperboliques	62
11	Application aux développements limités	63
12	Analogues des formules d'Euler et de Moivre	63
13	Fonctions inverses des fonctions hyperboliques	64
14	Relations entre fonctions hyperboliques et circulaires	65
III	Exercices corrigés	66
4	Calcul différentiel et intégral	77
I	Fiche 1 : calcul différentiel	77
1	Dérivée d'une fonction d'une variable	77
2	Séries de Taylor et de Maclaurin	82
3	Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables	83
4	Différentielle d'une fonction	85
5	Forme différentielle	86
II	Fiche 2 : calcul intégral	87
1	Primitive	87
2	Intégrale de Riemann	89
3	Propriétés de l'intégrale de Riemann	89
4	Intégrale de Riemann impropre	90
5	Intégrale sur un intervalle symétrique	90

6	Théorème (de la moyenne)	91
7	Méthodes d'intégration	91
III	Exercices corrigés	100
5	Équations différentielles	131
I	Fiche 1 : généralités et théorèmes	131
II	Fiche 2 : équations du premier ordre	132
1	Cas général	132
2	Équation à coefficients constants	133
III	Fiche 3 : équations du second ordre	134
1	Cas général	134
2	Équation à coefficients constants	136
IV	Fiche 4 : autres équation différentielles	139
1	Équation d'Euler	139
2	Équation de Bernoulli	140
V	Exercices corrigés	140
6	Séries de Fourier	165
I	Fiche 1 : séries trigonométriques	166
1	Définition	166
2	Critère d'Abel	166
3	Corollaire	167
II	Fiche 2 : séries de Fourier	168
1	Théorème (Dirichlet et Jordan)	168
2	Fondamental et harmoniques	169
3	Coefficients de Fourier	170
4	Fonction génératrice	171
III	Fiche 3 : théorème de Bessel et Parseval	173
1	Le théorème	173
2	Le théorème en termes d'énergie	174
IV	Exercices corrigés	176
7	Transformation de Fourier	207
I	Fiche 1 : généralités	208
1	Définition	208
2	Coefficients de Fourier et transformée de Fourier	209
3	Propriétés	209
II	Fiche 2 : transformation de Fourier dans L^1	210
1	Espace L^1	210
2	Théorème (existence dans L^1)	211
3	Corollaire	212

III	Fiche 3 : transformation de Fourier dans L^2	212
	1 Espace L^2	212
	2 Théorème (existence dans L^2)	213
	3 Théorème (Parseval et Plancherel)	213
	4 Corollaire	214
IV	Fiche 4 : transformation de Fourier dans S	215
	1 Espace S	215
	2 Théorème (existence dans S)	215
	3 Formule de dérivation en ν	215
	4 Formule de dérivation en t	216
V	Fiche 5 : convolution et Fourier	217
	1 Définition	217
	2 Propriétés	219
	3 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ et S	220
	4 Tables de transformées de Fourier de fonctions	221
VI	Annexe : transformation en ondelettes	221
VII	Exercices corrigés	224
8	Transformation de Laplace	253
I	Fiche 1 : généralités	253
	1 Transformée de Laplace bilatère	253
	2 Transformée de Laplace unilatère	254
	3 Transformation en z	254
	4 Importance de la transformée de Laplace bilatère	256
	5 Notation	257
	6 Transformées de Laplace usuelles	257
II	Fiche 2 : propriétés élémentaires	258
	1 Propriété 1 (linéarité)	258
	2 Propriété 2 (changement d'échelle)	259
	3 Propriété 3 (translation en t)	259
	4 Propriété 4 (translation en s)	259
	5 Propriété 5 (dérivation en s)	260
	6 Propriété 6 (théorème des sauts)	260
	7 Corollaire	261
	8 Formules de la valeur initiale et de la valeur finale	261
III	Fiche 3 : fonction semi-périodique	262
	1 Définition	262
	2 Théorème (transformée de Laplace et semi-périodicité)	262
IV	Fiche 4 : tables de transformées de Laplace	264
	1 Tables de transformées de Laplace bilatères	264
	2 Transformées de Laplace et théorème du retard	265

	3	Table de transformées en z	265
V		Fiche 5 : convolution et Laplace	269
	1	Définition	269
	2	Convolution de deux fonctions causales	269
	3	Propriétés	269
	4	Théorème (image d'un produit de convolution)	270
VI		Fiche 6 : équations différentielles	271
	1	Cas de la transformation de Laplace bilatère	271
	2	Cas de la transformation de Laplace unilatère	274
	3	Système d'équations différentielles	277
VII		Fiche 7 : lien avec l'analyse de Fourier	278
	1	Détermination de transformées de Fourier	278
	2	Détermination de coefficients de Fourier	278
VIII		Exercices corrigés	279
9		Sur la théorie du signal	307
I		Généralités	307
	1	Signal continu	308
	2	Signal discret	308
	3	Lien signal analogique - signal numérique	308
II		Énergie et puissance	309
	1	Énergie	309
	2	Puissance	309
III		Les transformations	309
	1	Série de Fourier	309
	2	Transformation de Fourier	312
	3	Transformation en ondelettes	315
	4	Transformation de Laplace	316
	5	Transformation en z	317
IV		La convolution	318
	1	Signal continu	318
	2	Signal discret	318
	3	Notion de filtre	319
V		Les distributions	320
10		Courbes et intégrales curvilignes	321
I		Fiche 1 : paramétrisation d'une courbe	321
	1	Paramétrisation dans \mathbb{R}^2	321
	2	Paramétrisation dans \mathbb{R}^3	323
II		Fiche 2 : longueur d'un arc de courbe	323
	1	Longueur d'un arc dans \mathbb{R}^2	323

	2	Longueur d'un arc dans \mathbb{R}^3	327
III		Fiche 3 : intégrales curvilignes	328
	1	Intégrale curviligne dans \mathbb{R}^2	328
	2	Intégrale curviligne dans \mathbb{R}^3	332
IV		Exercices corrigés	334
11 Intégrales multiples			353
I		Fiche 1 : intégrales doubles	353
	1	Intégrale double en cartésiennes	353
	2	Changement de variables dans une intégrale double . . .	354
	3	Intégrale double en polaires	355
	4	Cas particulier de variables non liées	356
	5	Application au calcul d'aires	357
II		Fiche 2 : intégrales triples	359
	1	Intégrale triple en cartésiennes	359
	2	Changement de variables dans une intégrale triple . . .	360
	3	Intégrale triple en cylindriques et en sphériques	361
	4	Application au calcul de volumes	363
III		Exercices corrigés	364
12 Analyse vectorielle			379
I		Fiche 1 : champs scalaire et vectoriel	379
	1	Champ scalaire dans \mathbb{R}^3	379
	2	Champ vectoriel dans \mathbb{R}^3	380
II		Fiche 2 : produits scalaire, vectoriel et mixte	381
	1	Produit scalaire dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3	381
	2	Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3	382
	3	Produit mixte dans \mathbb{R}^3	383
III		Fiche 3 : gradient d'une fonction	383
	1	Définition	383
	2	Gradient d'une somme	383
	3	Gradient d'un produit	384
	4	Lien gradient-différentielle	384
IV		Fiche 4 : divergence d'un vecteur	384
	1	Définition	384
	2	Divergence d'une somme	384
	3	Divergence du produit d'un scalaire par un vecteur . . .	384
V		Fiche 5 : rotationnel d'un vecteur	385
	1	Définition	385
	2	Rotationnel d'une somme	385
	3	Rotationnel du produit d'un scalaire par un vecteur . .	385

	4	Formules diverses	386
VI	Fiche 6 : laplaciens		386
	1	Laplacien d'une fonction ou champ scalaire	386
	2	Laplacien d'un vecteur ou champ vectoriel	387
VII	Fiche 7 : changements de coordonnées		387
	1	Cas général	387
	2	Coordonnées cartésiennes	390
	3	Coordonnées cylindriques	391
	4	Coordonnées sphériques	392
	5	Autres coordonnées	393
	6	Notations symboliques	393
VIII	Fiche 8 : circulation et flux		394
	1	Formule du rotationnel	394
	2	Formule de la divergence	396
IX	Exercices corrigés		397
13 Calcul matriciel			415
I	Fiche 1 : définitions et opérations sur les matrices		415
	1	Généralités sur les matrices	415
	2	Matrices associées à une matrice donnée	416
	3	Multiplication d'une matrice par un scalaire	417
	4	Somme de deux matrices	417
	5	Produit de deux matrices	417
	6	Inverse d'une matrice carrée	418
	7	Matrices semblables	418
	8	Produit scalaire de deux vecteurs	419
	9	Norme d'un vecteur	419
	10	Angle de deux vecteurs	420
	11	Règles pour la somme et le produit de matrices	420
II	Fiche 2 : matrices carrées particulières		421
	1	Matrice symétrique, matrice antisymétrique	421
	2	Matrice hermitique	421
	3	Matrice orthogonale	421
	4	Matrice unitaire	421
III	Fiche 3 : trace et déterminant d'une matrice		422
	1	Trace d'une matrice carrée	422
	2	Déterminant d'une matrice carrée	422
IV	Fiche 4 : calcul de l'inverse d'une matrice		425
	1	Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité	425
	2	Calcul pratique de l'inverse d'une matrice	425
V	Fiche 5 : systèmes linéaires		427

1	Transformation linéaire	427
2	Système $m \times m$	429
3	Changement de base	430
VI	Fiche 6 : éléments propres d'une matrice	432
1	Généralités	432
2	Détermination des valeurs propres	433
3	Détermination des vecteurs propres	434
4	Cas d'une matrice hermitique	434
5	Théorème (Cayley et Hamilton)	435
VII	Fiche 7 : réduction d'un endomorphisme	438
1	Interprétation de la notion de matrice	438
2	Diagonalisation d'une matrice	440
VIII	Fiche 8 : puissance et exponentielle	443
1	Puissance d'une matrice	443
2	Exponentielle d'une matrice	444
IX	Fiche 9 : application aux systèmes différentiels	445
1	Généralités	445
2	Procédure de calcul	447
X	Exercices corrigés	448
	Bibliographie	483
	Index	485