

Dragi Karevski

# Physique quantique des champs et des transitions de phase

Master  
Doctorat

Avec exercices corrigés



# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>PRÉAMBULE QUANTIQUE</b>	<b>11</b>
1.1	Cadre mathématique de la théorie quantique . . . . .	11
1.1.1	Espaces de Hilbert . . . . .	11
1.1.2	Dimension finie . . . . .	13
1.1.3	Dimension infinie . . . . .	17
1.2	Notations de Dirac . . . . .	28
1.2.1	Dual de $\mathfrak{H}$ . . . . .	28
1.2.2	Produits tensoriels, projecteurs et résolution de l'identité . .	30
1.3	Description des états physiques et des observables . . . . .	34
1.3.1	Description des observables physiques . . . . .	34
1.3.2	Description des états physiques . . . . .	37
1.3.3	Etats purs et mélanges statistiques . . . . .	38
1.3.4	Distribution de probabilité d'une variable dynamique . . . .	49
	Exercices . . . . .	53
	Références . . . . .	54
<b>2</b>	<b>DYNAMIQUE ET SYMÉTRIES</b>	<b>57</b>
2.1	Evolution temporelle des systèmes physiques . . . . .	57
2.1.1	Evolution unitaire des systèmes isolés . . . . .	57
2.1.2	Point de vue de Heisenberg . . . . .	63
2.1.3	Point de vue de Dirac . . . . .	68
2.1.4	Probabilité de transition . . . . .	74
2.1.5	Formulation dans l'espace des phases, fonction de Wigner .	79
2.2	Dynamique des systèmes ouverts . . . . .	90
2.2.1	Systèmes bipartites : système plus environnement . . . . .	90
2.2.2	Limite markovienne et équation de Lindblad . . . . .	96
2.2.3	Dynamique complètement positive . . . . .	108
2.2.4	Vectorisation . . . . .	118
2.3	Symétries dynamiques et lois de conservation . . . . .	128

2.3.1	Transformation des états et des observables . . . . .	128
2.3.2	Représentations linéaires d'un groupe de transformations . . . . .	129
2.3.3	Symétrie dynamique . . . . .	142
2.3.4	Invariance par translation et renversement du temps . . . . .	145
	Exercices . . . . .	159
	Références . . . . .	161
<b>3</b>	<b>MÉCANIQUE QUANTIQUE RELATIVISTE</b>	<b>163</b>
3.1	Invariance sous le groupe de Poincaré . . . . .	163
3.1.1	Invariance de l'intervalle . . . . .	163
3.1.2	Groupe de Lorentz . . . . .	166
3.1.3	Groupe de Poincaré . . . . .	173
3.1.4	Représentation unitaire du groupe de Poincaré . . . . .	177
3.1.5	Parité et renversement temporel . . . . .	200
3.2	Une équation relativiste à une particule . . . . .	209
3.2.1	Une première tentative : l'équation de Klein–Gordon . . . . .	209
3.2.2	L'équation de Dirac par Dirac . . . . .	212
3.2.3	Forme explicitement covariante de l'équation de Dirac . . . . .	215
3.2.4	Courant conservé et normalisation de la fonction d'onde . . . . .	217
3.2.5	Couplage minimal . . . . .	219
3.3	Solutions de l'équation de Dirac . . . . .	220
3.3.1	Solutions de l'équation de Dirac libre . . . . .	220
3.3.2	Spin de l'électron, facteur de Landé et équation de Pauli . . . . .	227
3.3.3	Corrections relativistes . . . . .	232
3.3.4	Transformation de Foldy–Wouthuysen . . . . .	236
3.4	Quelques commentaires . . . . .	244
3.4.1	Retour sur l'équation de Klein–Gordon . . . . .	244
3.4.2	Covariance de l'équation de Dirac . . . . .	246
	Exercices . . . . .	247
	Références . . . . .	248
<b>4</b>	<b>SECONDE QUANTIFICATION</b>	<b>249</b>
4.1	Espace de Fock et formalisme d'occupation . . . . .	249
4.1.1	Postulat de symétrisation . . . . .	249
4.1.2	Opérateurs de création et d'annihilation dans l'espace de Fock . . . . .	257
4.1.3	Expression des opérateurs à un et deux corps . . . . .	267
4.1.4	Théorème de Wick . . . . .	279
4.1.5	Distributions de Fermi–Dirac et Bose–Einstein . . . . .	280
4.2	Gaz de bosons libres . . . . .	284
4.2.1	Deux types de bosons . . . . .	284

4.2.2	Rayonnement électromagnétique dans une cavité . . . . .	285
4.2.3	Phonons . . . . .	293
4.2.4	Condensation de Bose–Einstein . . . . .	300
4.3	Gaz de fermions libres . . . . .	315
4.3.1	Le gaz de fermions libres à température nulle . . . . .	315
4.3.2	Description grand canonique . . . . .	317
4.3.3	Comportement de basse température . . . . .	322
	Exercices . . . . .	327
	Références . . . . .	328
<b>5</b>	<b>THÉORIE DES CHAMPS</b>	<b>331</b>
5.1	Champs classiques . . . . .	331
5.1.1	Approche de type théorie de champs . . . . .	331
5.1.2	La chaîne harmonique classique . . . . .	333
5.1.3	Quantification canonique . . . . .	340
5.2	Principe de moindre action . . . . .	341
5.2.1	Equations d’Euler–Lagrange pour un système de particules .	342
5.2.2	Equations d’Euler–Lagrange pour un système continu . . . .	343
5.2.3	Symétries et théorème de Noether . . . . .	349
5.3	Le champ électromagnétique classique . . . . .	363
5.3.1	Equations de Maxwell et champ de jauge . . . . .	363
5.3.2	Formulation covariante . . . . .	364
5.3.3	Action du champ électromagnétique . . . . .	366
5.4	Quantification du champ électromagnétique . . . . .	369
5.4.1	Le champ électromagnétique en jauge de Coulomb . . . . .	369
5.4.2	Quantification canonique du champ électromagnétique . . . .	375
5.4.3	Effet Casimir . . . . .	383
	Exercices . . . . .	389
	Références . . . . .	390
<b>6</b>	<b>PHÉNOMÈNES CRITIQUES</b>	<b>391</b>
6.1	Transitions de phases . . . . .	391
6.1.1	Loi de phases de Gibbs . . . . .	392
6.1.2	Fluctuations et minima du potentiel de Gibbs . . . . .	394
6.1.3	Point critique . . . . .	401
6.2	Théorie de Ginsburg–Landau . . . . .	404
6.2.1	Approche de Landau . . . . .	405
6.2.2	Modèle $\phi^4$ . . . . .	406
6.2.3	Validité de l’approche de Landau : critère de Ginsburg . . . .	415
6.3	Scaling, universalité et groupe de renormalisation . . . . .	428

6.3.1	Exposants critiques et hypothèse d'homogénéité . . . . .	428
6.3.2	Le groupe de renormalisation . . . . .	440
	Exercices . . . . .	454
	Références . . . . .	455
<b>7</b>	<b>MATRICE DE TRANSFERT</b>	<b>457</b>
7.1	Matrice de transfert pour le modèle d'Ising $1d$ . . . . .	457
7.1.1	Définition et fonction de partition . . . . .	457
7.1.2	Matrice de transfert . . . . .	459
7.1.3	Opérateur d'évolution en temps euclidien . . . . .	465
7.1.4	Fonctions de corrélations . . . . .	466
7.2	Modèle d'Ising $2d$ . . . . .	470
7.2.1	Matrice de transfert du modèle d'Ising $2d$ . . . . .	470
7.2.2	Limite anisotrope extrême . . . . .	481
	Exercices . . . . .	483
	Références . . . . .	484
<b>8</b>	<b>INTÉGRALES DE CHEMINS</b>	<b>485</b>
8.1	Etats cohérents de Bose et intégrale fonctionnelle . . . . .	485
8.1.1	Le cas à un mode bosonique . . . . .	485
8.1.2	Théorie de champ bosonique . . . . .	491
8.1.3	Solution du cas libre . . . . .	494
8.1.4	Bosons en interaction . . . . .	498
8.2	Intégrales fonctionnelles pour les fermions . . . . .	502
8.2.1	Variables de Grassmann . . . . .	502
8.2.2	Intégration sur les variables de Grassmann . . . . .	510
8.2.3	Isomorphisme de Fock–Grassmann . . . . .	522
8.2.4	Théorie de champ fermionique . . . . .	529
	Exercices . . . . .	533
	Références . . . . .	535
<b>9</b>	<b>TRANSITIONS DE PHASE QUANTIQUES</b>	<b>537</b>
9.1	Transitions de phase quantiques . . . . .	537
9.1.1	Qu'est-ce qu'une transition de phase quantique ? . . . . .	537
9.1.2	Effet des fluctuations thermiques . . . . .	540
9.2	Modèle d'Ising en champ transverse . . . . .	543
9.2.1	Approche qualitative du modèle . . . . .	543
9.2.2	Transformation de Jordan–Wigner et de Bogoliubov . . . . .	551
9.3	Diagonalisation canonique de la chaîne XY . . . . .	561
9.3.1	Chaîne quantique XY . . . . .	561

9.3.2	Fermions de Majorana . . . . .	562
9.3.3	Diagonalisation de la matrice de couplages . . . . .	564
9.3.4	Spectre d'excitation . . . . .	569
9.4	Comportement critique du modèle XY . . . . .	575
9.4.1	Quantités physiques . . . . .	576
9.4.2	Diagramme de phases . . . . .	578
9.4.3	Le modèle XY dans la limite continue . . . . .	585
	Exercices . . . . .	588
	Références . . . . .	589
<b>10</b>	<b>QUELQUES OUTILS MATHÉMATIQUES</b>	<b>591</b>
10.1	Transformation de Fourier . . . . .	591
10.1.1	Définitions et propriétés . . . . .	591
10.1.2	Théorie des distributions dans un mouchoir de poche . . . . .	594
10.1.3	Transformation de Fourier des distributions . . . . .	603
10.2	Fonctions de Green . . . . .	606
10.2.1	Système linéaire, continu et invariant par translation . . . . .	606
10.2.2	Algèbre de convolution . . . . .	607
10.2.3	Fonctions de Green . . . . .	612
10.3	Quelques résultats épars . . . . .	615
10.3.1	Dérivée fonctionnelle . . . . .	615
10.3.2	Transformée de Legendre . . . . .	619
10.3.3	Inégalité de convexité . . . . .	620
	Exercices . . . . .	622
	Références . . . . .	622
	<b>CORRECTIONS DES EXERCICES</b>	<b>625</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>669</b>
	<b>Index</b>	<b>677</b>