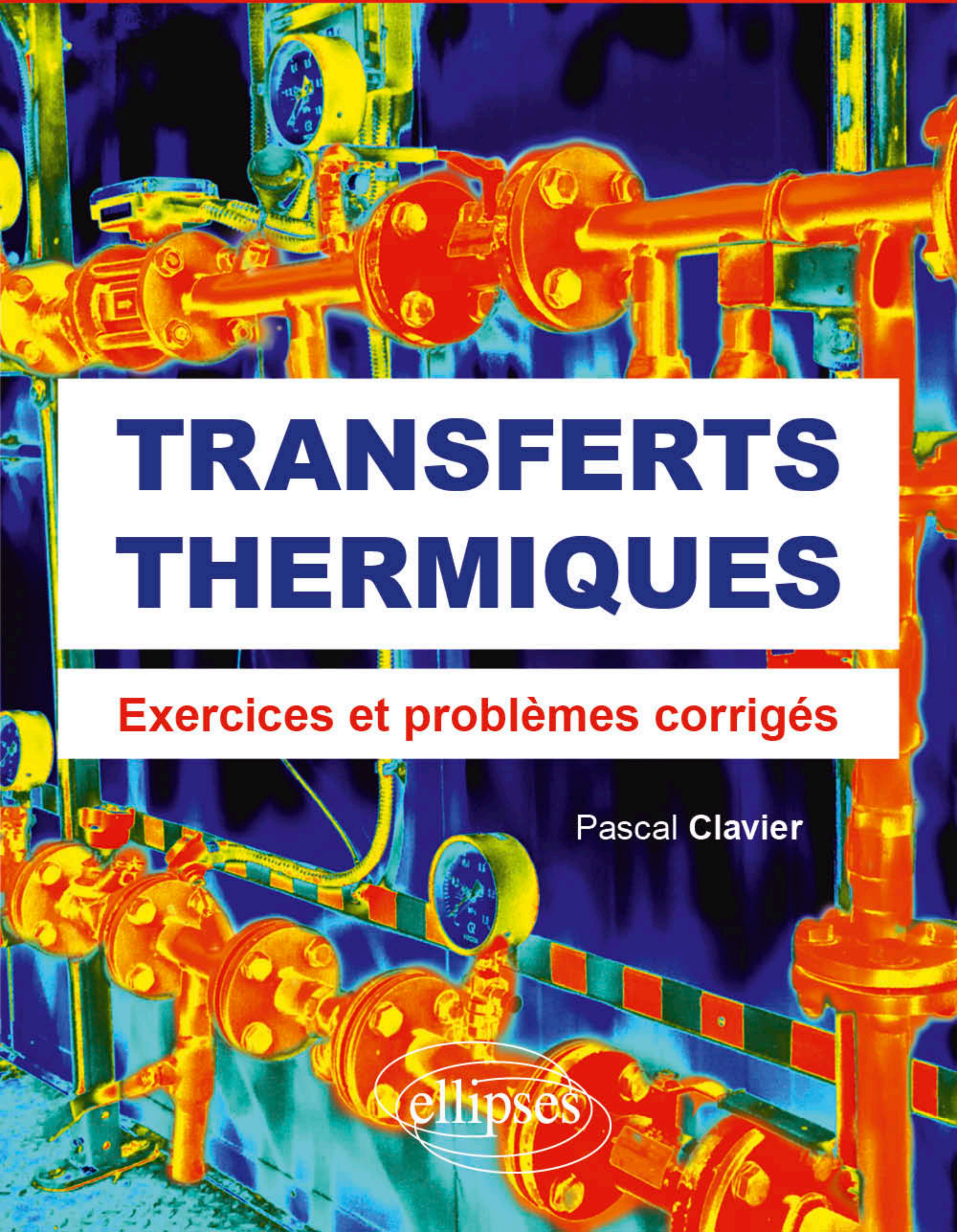
BTS / BUT / LICENCE



TRANSFERTS THERMIQUES

Exercices et problèmes corrigés

Pascal **Clavier**

ellipses

I. Les différents modes de transferts thermiques

1. Le rayonnement

Un corps dont la température est supérieure à 0 K, va émettre un rayonnement électromagnétique qui véhicule une certaine puissance thermique. Ce mode de transfert ne nécessite pas de milieu matériel obligatoirement, il peut s'effectuer dans le vide.

2. Convection

Le transfert d'énergie se fait par déplacement de matière d'un fluide (gaz ou liquide). La convection qui se produit entre le fluide et une paroi va dépendre de plusieurs paramètres : la différence de température, la vitesse du fluide, la capacité thermique massique du fluide, la surface d'échange…

On a la convection naturelle et la convection forcée (ventilateur, sèche-cheveux…).

3. Conduction (ou diffusion thermique)

La conduction est un mode de transfert thermique sans déplacement macroscopique de matière. Ce transfert s'effectue de proche en proche grâce à l'agitation thermique microscopique d'entités (atomes, molécules…) toujours dans le sens des températures décroissantes.

II. La diffusion thermique (ou conduction)

1. Le flux thermique

Le flux thermique ou puissance thermique correspond à l'énergie thermique traversant une surface S isotherme par unité de temps.

$$\Phi_{th} = \frac{\delta Q}{\delta t}$$

Le flux thermique s'exprime en watt (W).

2. Densité de flux thermique

On note $\overrightarrow{J_{th}}$ le courant thermique (ou densité de flux thermique surfacique ou encore densité volumique de courant thermique). Il représente la puissance thermique qui traverse l'unité de surface. $\overrightarrow{J_{th}}$ est orienté dans le sens du transfert thermique.

$$\boxed{\Phi_{th} = \iint_S \overrightarrow{J_{th}}.\overrightarrow{dS}}$$

L'unité de J_{th} est le $W.m^{-2}$.

3. Loi de Fourier

La loi de Fourier est une loi phénoménologique (expérimentale), elle donnée par la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{J_{th}} = -\lambda.\overrightarrow{\text{grad}}\,T}$$

Le signe "–" indique que le transfert thermique s'effectue dans le sens des températures décroissantes.

T est la température.

9782340-064195_001_320.indd 11 25/11/2021 12:01

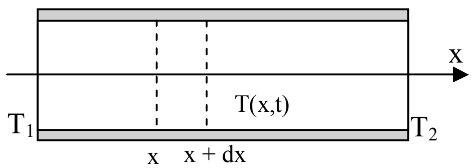
λ : est une constante positive appelée conductivité thermique, en $W.m^{-1}.K^{-1}$. Elle exprime l'aptitude du milieu à conduire l'énergie thermique, plus λ est grande et moins le matériau est un bon isolant. On considèrera ici que λ est indépendante de la température.
Le gradient en coordonnées cartésiennes se note :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{e}_z$$

A une dimension, on notera :

$$\boxed{\overrightarrow{J_{th}}(x,t) = -\lambda.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\overrightarrow{e_x}}$$

4. Equation de la diffusion thermique



On considère une barre de capacité thermique massique c, calorifugée sur sa surface extérieure, placée entre deux milieux de température T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$ et l'on considère qu'il n'y a pas apport d'énergie autre que par conduction. On note T(x, t) la température à un instant t en un point M d'abscisse x.
Le but est d'établir l'équation qui donne l'évolution dans l'espace et le temps du champ de température à partir d'un bilan thermique.
On raisonne sur une portion de section S située entre x et x + dx.
On applique le premier principe de la thermodynamique à ce système fermé pendant un temps dt.
On note : $d\tau = S.dx$ l'élément de volume de masse $dm = \rho d\tau = \rho.S.dx$.
Le premier principe donne :

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q \quad \text{(car pas de travail)}$$

A noter que l'on peut aussi utiliser l'enthalpie $\Delta H = \delta Q$.
On exprime alors dU puis δQ :

$$dU = dm.c.dT = U(t + dt) - U(t) = dm.c.\ (T(t + dt) - T(t))$$

$$dU = \rho.S.c.dx.\frac{\partial T}{\partial t}(x,t).dt \qquad (1)$$

δQ = énergie entrante en x – énergie sortante en x + dx, soit :

$$\delta Q = \delta Q_e(x, t) - \delta Q_s(x + dx, t) = \Phi_e(x, t).dt - \Phi_s(x + dx, t).dt$$

Comme : $\Phi_{th} = \iint_S \overrightarrow{J_{th}}.\overrightarrow{dS} = J_{th}(x,t).S$

$$\delta Q = J_{th}(x, t).S.dt - J_{th}(x + dx, t).S.dt$$

$$\delta Q = -\frac{\partial J_{th}(x,t)}{\partial x}.dx.S.dt \qquad (2)$$

On égalise les deux quantités (1) et (2) :

$$\rho.S.c.dx.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}.dt = -\frac{\partial J_{th}(x,t)}{\partial x}.dx.S.dt$$

$$\rho.c.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_{th}(x,t)}{\partial x}$$

$$\rho.c.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

On obtient ainsi l'équation de la chaleur à une dimension :

$$\boxed{\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho.c}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}}$$

On note : $a = \frac{\lambda}{\rho.c}$ la diffusivité thermique ou coefficient de diffusion thermique.

Ce coefficient s'exprime en $m^2.s^{-1}$. On peut lui associer une longueur caractéristique L_c et un temps caractéristique τ_c.

$$a = \frac{L^2}{\tau} \Rightarrow L_c = \sqrt{a \times \tau_c}$$

A noter que la diffusion thermique est un processus irréversible et un phénomène lent.

Conditions aux limites

La résolution de cette équation de la chaleur (équation de la diffusion thermique) implique qu'il est nécessaire de connaître les conditions aux limites (variables d'espaces) et des conditions initiales.

On peut considérer :

- il y a continuité du flux thermique ;
- pour le contact entre deux solides on aura égalité des flux thermiques car il ne peut y avoir accumulation d'énergie ;
- pour un contact entre un solide et un fluide, le phénomène de convection intervient, on fera alors appel à la loi de Newton.

5. Equation de la diffusion thermique à 3 dimensions

On considère le cas général où la température T dépend des trois coordonnées x, y et z. Si l'on considère que le seul apport d'énergie se fait par conduction, on aura la relation :

$$\rho c\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{J}_{th}(M,t) \text{ soit } \rho c\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -\mathrm{div}(-\lambda\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T(M,t))$$

$$\boxed{\rho c\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \lambda\Delta T(M,t)}$$

Δ est l'opérateur Laplacien.

6. Equation de la diffusion thermique avec une source

Dans certains cas, de l'énergie peut être apportée localement, comme par exemple par effet Joule, par une source radioactive…

Cette production d'énergie dans le volume du système est caractérisée par une puissance volumique P_v.
Les relations précédentes deviennent alors :

$$\rho.c.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_{th}(x,t)}{\partial x} + P_V(x,t)$$

$$\rho c\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{J}_{th}(M,t) + P_V(M,t)$$

7. Résistance thermique

La résistance thermique est une notion très utilisée dans le bâtiment car elle indique le pouvoir isolant d'un matériau.
On conserve notre barre calorifugée, de longueur e. On suppose que le problème ne dépend que de la profondeur x. Le champ de température est alors noté T(x, t).

En régime stationnaire, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ le flux entrant dans un système est égal au flux sortant de sorte que l'équation de la chaleur se ramène à :

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT(x)}{dx} = A \Rightarrow T(x) = A.x + B$$

On détermine A et B :

à $x = 0$, $T(0) = T_1 = B$ et pour $x = e$, $T(e) = T_2 \Rightarrow T_2 = A.e + T_1 \Rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{e}$

$$\boxed{T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e}.x + T_1}$$

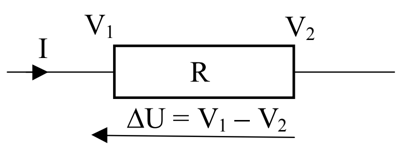
Connaissant le champ de température, on peut obtenir la densité de flux puis le flux thermique.

$$J_{th} = -\lambda\frac{dT}{dx} \Rightarrow J_{th} = -\frac{\lambda(T_2 - T_1)}{e}$$

On en déduit le flux : $\Phi_{th} = J_{th}.S$

$$\boxed{\Phi_{th} = \frac{\lambda.S}{e}(T_1 - T_2)}$$

Par analogie avec l'électricité, on peut définir une résistance thermique :



Grandeurs	Electriques	Thermiques
Flux	Intensité I	Flux thermique Φ_{th}
Densité de courant (de flux)	$\vec{J}_{elec}$	$\vec{J}_{th}$
Loi	$\vec{J}_{elec} = \gamma\vec{E} = -\gamma\overrightarrow{grad}\,V$	$\vec{J}_{elec} = \gamma\vec{E} = -\gamma\overrightarrow{grad}\,V$
Différence de potentiel (de température	$\Delta U = V_1 - V_2$	$\Delta T = T_1 - T_2$
Résistance	$R = \dfrac{\Delta U}{I}$	$R_{th} = \dfrac{\Delta T}{\Phi_{th}}$

On peut donc écrire :

$$\boxed{\Phi_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{R_{th} = \frac{e}{\lambda.S}} \text{ en K.W}^{-1}.$$

On utilise aussi la résistance surfacique r_s :

$$\boxed{r_s = \frac{e}{\lambda}} \text{ en m}^2\text{.K.W}^{-1}$$

III. La convection

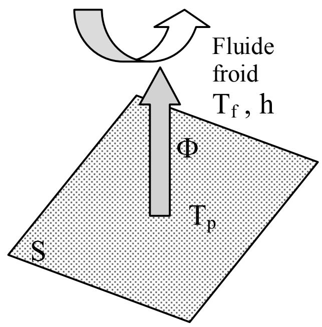
Le transfert d'énergie se fait par déplacement de matière au sein d'un gaz ou d'un liquide.
On a la convection naturelle et la convection forcée (ventilateur, sèche-cheveux…).
La convection se produisant entre un fluide et une paroi va dépendre de plusieurs paramètres : la différence de température, la vitesse du fluide, la capacité thermique massique du fluide, la surface d'échange…

1. Loi de Newton

$$\boxed{\Phi = h \times S \times (T_p - T_f)}$$

h : coefficient de transfert thermique en $W.m^{-2}.K^{-1}$.
Cette loi se vérifie dans le cas ou $\theta = T_p - T_f$ n'est pas trop élevé.
On en tire la résistance de convection :

$$\boxed{R_c = \frac{1}{h.S} \text{ et } r_c = \frac{1}{h}}$$



La connaissance du coefficient d'échange h est donc fondamental. Pour pouvoir le déterminer dans différents cas, on est amené à introduire des nombres sans dimensions.

2. Nombres sans dimensions

– Le nombre de Nusselt

Il caractérise l'échange thermique entre le fluide et la paroi. Sa valeur est de 1 au minimum (conduction seule).

$$Nu = \frac{h.D}{\lambda} \Rightarrow Nu = \frac{\text{Effets convectifs}}{\text{Effets conductifs}}$$

9782340-064195_001_320.indd 15 25/11/2021 12:01

D : dimension caractéristique de la surface d'échange (diamètre par exemple pour une conduite) ;
λ : conductivité du fluide.

– Le nombre de Reynolds

Il caractérise le régime de l'écoulement dans une conduite, laminaire ou turbulent.

$$R_e = \frac{\rho.v.d}{\eta} \Rightarrow R_e = \frac{\text{Effets liés à la vitesse}}{\text{Effets visqueux}}$$

ρ : masse volumique ; v : vitesse du fluide ; d : diamètre de la canalisation ; η : viscosité dynamique
$R_e < 2000$ régime laminaire ; $R_e > 2000$ régime turbulent.

– Le nombre de Prandtl

Il caractérise le fluide. Un nombre de Prandtl élevé indique que le transfert thermique est fortement lié au profil de vitesse.

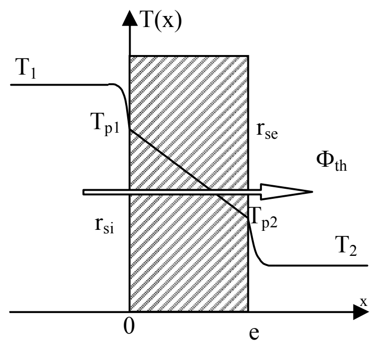
$$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda} \Rightarrow Pr = \frac{\text{proprités visqeuses}}{\text{propriété de diffusion thermique}}$$

c_p : capacité thermique massique à pression constante.

IV. Applications

1. Le mur simple

On considère un mur d'épaisseur e, de conductivité λ, chaque face est en contact avec un milieu dont l'un est à la température T_1 et l'autre à la température T_2 avec $T_1 > T_2$. r_{si} et r_{se} sont les résistances de convection intérieure et extérieure.



Flux :

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{eq}} \text{ ou } \varphi = \frac{T_1 - T_2}{r_{eq}} \Rightarrow r_{eq} = \frac{T_1 - T_2}{\varphi}$$

Pour les températures, on peut écrire :

$$T_1 - T_2 = (T_1 - T_{p1}) + (T_{p1} - T_{p2}) + (T_{p2} - T_2)$$

$$r_{eq} = \frac{T_1 - T_2}{\varphi} = \frac{(T_1 - T_{p1})}{\varphi} + \frac{(T_{p1} - T_{p2})}{\varphi} + \frac{(T_{p2} - T_2)}{\varphi}$$

$$\boxed{r_{eq} = r_{si} + \frac{e}{\lambda} + r_{se}}$$

Quand plusieurs milieux sont traversés par le même flux thermique on peut leur associer une résistance thermique équivalente comme étant la somme des résistances présentes (elles sont en série) :

$$R_{eq} = \sum R_i$$

Température en un point :

Si on désire connaître T_{p1} par exemple : $\boxed{r_{si} = \frac{T_1 - T_{p1}}{\varphi} \Rightarrow T_{p1} = T_1 - r_{si} \times \varphi}$

Idem pour les autres températures (voir exercices).

2. Le mur composé

La figure ci-après représente la coupe transversale d'un mur plan composé de couches de surfaces S, d'épaisseurs respectives e_A, e_B et e_C et de conductivité thermique respectives λ_a, λ_b et λ_c.
En régime stationnaire, le flux thermique est constant.
Le flux traverse la paroi A de résistance R_{thA} puis la paroi B de résistance R_{thB} et la paroi C de résistance R_{thC}.
Quand plusieurs milieux sont traversés par le même flux thermique on peut leur associer une résistance thermique équivalente comme étant la somme des résistances présentes (elles sont en série) :

$$R_{eq} = \sum R_i$$

La résistance thermique du mur de surface S s'écrit, (sans oublier la convection) :

$$R_{th} = \frac{r_{si}}{S} + \frac{e_a}{\lambda_a S} + \frac{e_B}{\lambda_b S} + \frac{e_C}{\lambda_c S}. + \frac{r_{se}}{S}$$

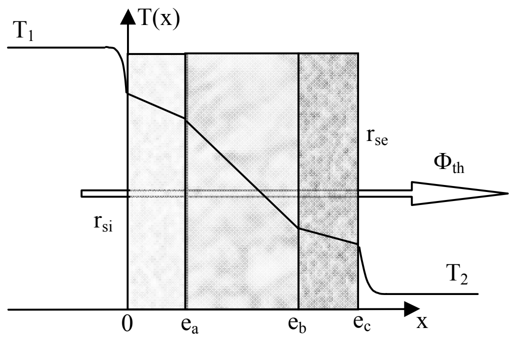
Pour n parois :

$$\boxed{R_{th\ \text{équivalente}} = \sum R_{th}\ (\text{de chaque paroi}) + R_i + R_e}$$

A noter que ce genre de calculs se fait souvent pour des résistances thermiques surfaciques, d'où :

$$r = r_{si} + \frac{e_a}{\lambda_a} + \frac{e_b}{\lambda_b} + \frac{e_c}{\lambda_c}. + r_{se}$$

$$\boxed{r = r_{int} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i}{\lambda_i} + r_{ext}}$$



3. Le mur composé (bis)

Une façade est composée d'une fenêtre, d'une porte et d'un mur chacun des composants ayant leur propre surface S, conductivité thermique λ et épaisseur e.
Chaque élément est soumis aux mêmes températures extrêmes T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$.
Le flux total s'exprime par :

$$\Phi_t = \frac{T_1 - T_2}{R_{eq}}$$

Quand plusieurs milieux sont soumis à la même différence de température, on peut leur associer une résistance thermique équivalente R_{eq} telle que l'association se fait en parallèle (voir schéma électrique équivalent ci-après).

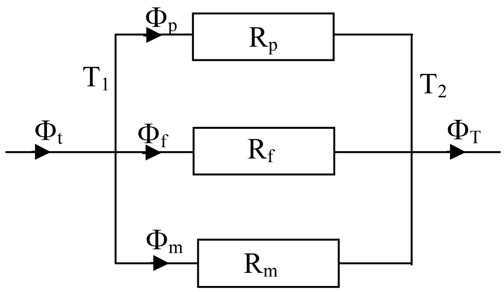
$$\Phi_t = \Phi_p + \Phi_m + \Phi_f$$

$$\frac{T_1 - T_2}{R_{eq}} = \frac{T_1 - T_2}{R_p} + \frac{T_1 - T_2}{R_m} + \frac{T_1 - T_2}{R_f}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_f}}$$

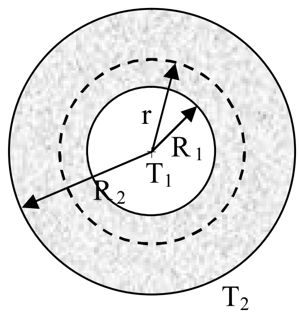
On peut généraliser :

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{R_i}}$$



4. Canalisation cylindrique simple

La figure ci-contre représente la coupe transversale d'une canalisation cylindrique creuse, de longueur L, de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2. On note λ la conductivité thermique (supposée constante) du matériau constituant la canalisation. Les températures extrêmes sont constantes (on se place en régime stationnaire) et égales à T_1 et T_2.



La conduction est radiale par raison de symétrie (selon le rayon) et se fait dans les mêmes conditions dans toutes les directions si le solide est isotrope.

On appelle Φ le flux thermique à travers la surface latérale de cette canalisation cylindrique de surface S.

Résistance thermique de cette portion de canalisation :

La loi de Fourier donne : $dT = -\frac{\Phi}{\lambda.S}.dr \Rightarrow dT = -\frac{\Phi}{\lambda.2\pi.L}.\frac{dr}{r}$.

On intègre cette équation entre T_1 et T_2 et R_1 et R_2 :

$$\int_{T_1}^{T_2} d\theta = -\frac{\Phi}{\lambda.2\pi.L} \int_{R_1}^{R_2} .\frac{dr}{r}$$

$$T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda.2\pi.L}.\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Comme $T_1 - T_2 = R_{th}.\Phi$, on en tire :

$$\boxed{R_{th} = \frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda L}}$$