Tearii Cridland

Licence
Capes
Agrégation

Panorama des mathématiques du supérieur

Plus de 650 définitions incontournables et 1 350 propriétés et théorèmes démontrés

ellipses

Chapitre I

Notions de base

A) Ensembles

1. Propositions

Dans cette partie on note P et Q deux propositions.

a) Propositions équivalentes et contraires

Une proposition en mathématiques possède seulement deux valeurs de vérité : elle est soit vraie, soit fausse. Deux propositions sont dites équivalentes lorsqu'elles possèdent toujours les mêmes valeurs de vérité. Une proposition est dite contraire d'une autre si elle possède toujours une valeur de vérité différente. La proposition contraire d'une proposition P est notée non(P).

b) Implication et équivalence

La proposition (non(P) ou Q) est notée $P \implies Q$ et se lit P implique Q.

$\boxed{\text{I.A.1.b.1.}}$ *Si les propositions P et $P \implies Q$ sont vraies alors la proposition Q est vraie.*

La proposition ($P \implies Q$ et $Q \implies P$) est notée $P \iff Q$ et se lit P équivalente à Q.

$\boxed{\text{I.A.1.b.2.}}$ *La proposition $P \iff Q$ est vraie si et seulement si les propositions P et Q sont équivalentes.*

La proposition $Q \implies P$ est appelée la réciproque de la proposition $P \implies Q$.

c) Démonstrations

Une démonstration consiste à établir la véracité d'une proposition à partir d'autres propositions vraies.

$\boxed{\text{I.A.1.c.1.}}$ *Les propositions* P *et* $\text{non}(P) \implies P$ *sont équivalentes.*

Dans un raisonnement par l'absurde on choisit de démontrer la proposition $\text{non}(P) \implies P$ plutôt que de démontrer P.

$\boxed{\text{I.A.1.c.2.}}$ *Les propositions* $P \implies Q$ *et* $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$ *sont équivalentes.*

Ces propositions sont dites contraposées. Ainsi pour démontrer une implication on peut choisir de démontrer sa contraposée.

$\boxed{\text{I.A.1.c.3.}}$ *Les propositions* $P \iff Q$ *et* $\text{non}(Q) \iff \text{non}(P)$ *sont équivalentes.*

2. Définition des ensembles

a) Définition en extension

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments. Si x est un élément d'un ensemble A alors on dit que x appartient à A et on note $x \in A$ cette proposition. On admet l'existence d'un ensemble vide noté $\emptyset$ qui ne contient aucun élément et qui est contenu dans tout autre ensemble. Un ensemble est caractérisé par ses éléments de sorte que si A et B sont deux ensembles alors on a :

$$A = B \iff (\text{Pour tout } x, x \in A \iff x \in B)$$

Pour construire un ensemble on peut désigner directement ses éléments, c'est à dire que si n objets sont désignés par les symboles $a_1, a_2, \dots, a_n$ alors on note l'ensemble de ces objets de la manière suivante :

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

On dit que l'ensemble A est défini en extension.

b) Quantificateurs

Un quantificateur est l'un des trois symboles suivants écrit juste avant une proposition :
- $\forall$ qui signifie "pour tout".
- $\exists$ qui signifie "il existe au moins un".
- $\exists!$ qui signifie "il existe un unique".

Si x est un élément d'un ensemble A et P_x une proposition qui concerne x alors la proposition $\forall x, x \in A \implies P_x$ est notée plus rapidement $\forall x \in A, P_x$ et de même la proposition $\exists x, x \in A \implies P_x$ est notée plus rapidement $\exists x \in A, P_x$.

$\boxed{\text{I.A.2.b.1.}}$ *Les propositions* $\text{non}\,(\forall x \in A, P_x)$ *et* $\exists x \in A, \text{non}(P_x)$ *sont équivalentes.*

$\boxed{\text{I.A.2.b.2.}}$ *Les propositions* $\text{non}\,(\exists x \in A, P_x)$ *et* $\forall x \in A, \text{non}(P_x)$ *sont équivalentes.*

c) Définition en compréhension

Si A est un ensemble alors on peut définir un nouvel ensemble B caractérisé par l'ensemble des éléments x de A vérifiant une proposition P_x qui concerne x :

$$B = \{x \in A | P_x\}$$

On dit que l'ensemble B est défini en compréhension.

3. Opérations sur les ensembles

Dans cette partie on note A et B deux ensembles.

a) Inclusion

On dit que B est inclus dans A et on note $B \subset A$ lorsque tout élément de B est élément de A. On dit encore que B est un sous-ensemble de A ou une partie de A. L'ensemble des parties de A est noté $\mathscr{P}(A)$.

b) Réunion et intersection

La réunion de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E est le sous-ensemble noté $A \cup B$ des éléments de E qui sont dans A ou dans B. L'intersection de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E est le sous-ensemble noté $A \cap B$ des éléments de E qui sont dans A et dans B. Deux ensembles dont l'intersection est vide sont dits disjoints.

c) Complémentaire et différence

Le complémentaire d'un sous-ensemble A d'un ensemble E est le sous-ensemble noté $\complement_E A$ des éléments de E qui ne sont pas dans A. La différence de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E est le sous-ensemble $A \cap \complement_E B$ noté encore $A \setminus B$.

d) Partition

Une partition d'un ensemble E est une famille (cf. I.A.4.i) de sous-ensembles non vides et deux à deux disjoints de E dont la réunion est l'ensemble E.

e) Produit cartésien

Pour la définition des entiers naturels on se référera si nécessaire à la section I.C.1.

On appelle produit cartésien de deux ensembles A et B l'ensemble des couples (a, b) où a est élément de A et b est élément de B :

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ et } b \in B\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sont n ensembles alors on définit encore leur produit cartésien en posant :

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1 \text{ et } a_2 \in A_2 \text{ et } \ldots \text{ et } a_n \in A_n\}$$

Un élément $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\prod_{k=1}^{n} A_k$ est appelé un n-uplet et $\forall k \in [\![1, n]\!]$ on dit que a_k est une composante du n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

4. Relation binaire sur un ensemble

Dans cette partie on note E et F deux ensembles.

a) Définition d'une relation binaire

Une relation binaire $\mathscr{R}$ de E vers F est un sous-ensemble de $E \times F$ et lorsque $(x, y) \in \mathscr{R}$ on note $x\mathscr{R}y$.

b) Fonctions et applications

Une relation binaire $\mathscr{R}$ de E vers F est appelée une fonction lorsque $\forall x \in E$, il existe au plus un élément $y \in F$ tel que $x\mathscr{R}y$ et on note alors $\forall x \in E, y = \mathscr{R}(x)$.

Une relation binaire $\mathscr{R}$ de E vers F est appelée une application lorsque $\forall x \in E, \exists! y \in F$ tel que $x\mathscr{R}y$ et on note alors $\forall x \in E, y = \mathscr{R}(x)$.

Une fonction ou une application $\mathscr{R}$ peut aussi être notée $x \mapsto \mathscr{R}(x)$. On appelle application identité de E l'application $x \mapsto x$ de E vers E et on la note Id_E.

Si $\mathscr{R}$ est une application de E vers F alors l'application $\mathscr{R}$ est dite :
- injective si $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \implies \mathscr{R}(x) \neq \mathscr{R}(y)$.
- surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = \mathscr{R}(x)$.
- bijective si elle est injective et surjective.

c) Relation d'équivalence et relation d'ordre

Si $\mathscr{R}$ est une relation binaire de E vers E alors on dit que $\mathscr{R}$ est une relation binaire sur E. Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est dite :
- réflexive si $\forall x \in E, x\mathscr{R}x$.
- symétrique si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x$.
- antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \implies x = y$.
- transitive si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \implies x\mathscr{R}z$.

Une relation binaire sur E est appelée une relation d'ordre sur E si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Une relation binaire sur E est appelée une relation d'équivalence sur E si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E alors pour tout $x \in E$ on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble :

$$\overline{x} = \{y \in E | x\mathscr{R}y\}$$

$\boxed{\text{I.A.4.c.1.}}$ *Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E alors l'ensemble des classes d'équivalence $\{\overline{x} | x \in E\}$ forme une partition de E.*

L'ensemble des classes d'équivalence est appelé l'ensemble quotient de E par la relation $\mathscr{R}$ et il est noté $E/\mathscr{R}$.

$\boxed{\text{I.A.4.c.2.}}$ *Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E alors l'application $x \mapsto \overline{x}$ de E vers $E/\mathscr{R}$ est surjective.*

Cette application est appelée la surjection canonique de E vers $E/\mathscr{R}$.

d) *Ensemble ordonné*

Pour la définition des entiers naturels on se référera si nécessaire à la section I.C.1.

Un ensemble E est dit ordonné s'il existe une relation d'ordre notée $\leq$ sur cet ensemble et on note alors $(E, \leq)$ l'ensemble ordonné. On appelle ordre strict associé à la relation d'ordre $\leq$ la relation $<$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2, x < y \iff (x \leq y \text{ et } x \neq y)$$

On dit que $(E, \leq)$ est totalement ordonné ou que la relation d'ordre $\leq$ est totale sur E si :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x$$

On appelle plus grand élément (ou élément maximum) d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ un élément $a \in E$ tel que $\forall x \in E, x \leq a$. Un tel élément s'il existe est unique par antisymétrie de la relation d'ordre et il est noté $\max(E)$.

On appelle de même plus petit élément (ou élément minimum) de E un élément $a \in E$ tel que $\forall x \in E, x \geq a$. Un tel élément s'il existe est unique par antisymétrie de la relation d'ordre et il est noté $\min(E)$.

On appelle extremum de E un élément maximum ou minimum de E.

$\boxed{\text{I.A.4.d.1.}}$ *Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné et A un sous-ensemble non vide de E, si A est fini alors A admet un plus grand élément et un plus petit élément.*

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble ordonné E. On appelle majorant de A un élément $a \in E$ tel que $\forall x \in A, x \leq a$ et minorant de A un élément $a \in E$ tel que $\forall x \in A, x \geq a$.

Si l'ensemble des majorants de A est non vide et admet un plus petit élément alors cet élément est noté $\sup(A)$ et appelé borne supérieure de A. Si l'ensemble des minorants de A est non vide et admet un plus grand élément alors cet élément est noté $\inf(A)$ et appelé borne inférieure de A.

$\boxed{\text{I.A.4.d.2.}}$ *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, on définit une relation binaire $\prec$ sur $(E^n)^2$ en posant $\forall (x, y) \in (E^n)^2, x \prec y \iff \big(x_1 < y_1$ ou $\exists k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $(x_1, \ldots, x_k) = (y_1, \ldots, y_k)$ et $x_{k+1} < y_{k+1}\big)$, on définit une relation d'ordre $\preceq$ sur E^n en posant $\forall (x, y) \in (E^n)^2, x \preceq y \iff (x \prec y$ ou $x = y)$, de plus si la relation d'ordre $\leq$ est totale sur E alors la relation d'ordre $\preceq$ est totale sur E^n.*

On dit que $\preceq$ est l'ordre lexicographique de E^n associé à $\leq$.

e) Applications croissantes ou décroissantes

Soit $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ deux ensembles ordonnés et f une application de E vers F.

L'application f est dite croissante sur E si $\forall (x,y) \in E^2, x < y \implies f(x) \preceq f(y)$ ou strictement croissante sur E si $\forall (x,y) \in E^2, x < y \implies f(x) \prec f(y)$.

L'application f est dite décroissante sur E si $\forall (x,y) \in E^2, x < y \implies f(x) \succeq f(y)$ ou strictement décroissante sur E si $\forall (x,y) \in E^2, x < y \implies f(x) \succ f(y)$.

Une application est dite monotone (respectivement strictement monotone) sur E si elle est croissante sur E ou si elle est décroissante sur E (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

f) Relation d'ordre sur les applications

Soit E un ensemble et $(F, \leq)$ un ensemble ordonné. L'ensemble des applications de E vers F noté F^E peut être muni aussi d'une relation d'ordre $\leq$ définie par :

$$\forall (f,g) \in F^E, f \leq g \iff (\forall x \in E, f(x) \leq g(x))$$

g) Image directe ou réciproque

Soit E et F deux ensembles, X une partie de E, Y une partie de F et f une application de E vers F. On appelle image de X par f le sous-ensemble $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$ et on appelle image réciproque de Y par f le sous-ensemble $f^{-1}(Y) = \{x \in E | f(x) \in Y\}$.

h) Composition d'applications

Si A, B et C sont trois ensembles, f une application de A vers B et g une application de B vers C alors on note $g \circ f$ l'application de A vers C appelée composée de f par g qui à tout élément x de A associe l'élément $g \circ f(x) = g(f(x))$.

$\boxed{\text{I.A.4.h.1.}}$ *La composée de deux applications injectives est injective.*

$\boxed{\text{I.A.4.h.2.}}$ *La composée de deux applications surjectives est surjective.*

Si E et F sont deux ensembles et f une application de E vers F bijective alors on note f^{-1} l'application de F vers E qui à tout y de F associe l'unique x de E tel que $y = f(x)$ et on dit que f^{-1} est l'application réciproque de f.

$\boxed{\text{I.A.4.h.3.}}$ *Si E et F sont deux ensembles alors $\forall (f,g) \in F^E \times E^F$ on a :*

$$(f \circ g = Id_F \text{ et } g \circ f = Id_E) \iff (f \text{ et } g \text{ sont bijectives avec } f^{-1} = g \text{ et } g^{-1} = f)$$

Si E est un ensemble alors on note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des bijections de E vers E et on déduit que toute application f de E vers E telle que $f \circ f = Id_E$ est dans $\mathscr{S}_E$. Une application f de E vers E vérifiant $f \circ f = Id_E$ est appelée une involution de E.

i) *Famille et suite d'éléments*

Pour la définition des entiers naturels on se référera si nécessaire à la section I.C.1.

Une famille d'éléments d'un ensemble E indexée dans un ensemble I est une application u définie sur I à valeurs dans E, on note alors $\forall i \in I, u(i) = u_i$ et $u = (u_i)_{i\in I}$. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite finie si l'ensemble I est fini (cf. I.A.5.d).

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ on dit que u est une suite d'éléments de E. Si u est une suite d'éléments de E alors on appelle suite extraite de u une suite d'éléments de E de la forme $u \circ \phi$ avec ϕ une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ strictement croissante.

$\boxed{\text{I.A.4.i.1.}}$ *Si u est une suite d'éléments d'un ensemble ordonné et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ alors u est croissante.*

5. Comparaison des ensembles

Dans cette partie on note A, B et C trois ensembles.

a) *Cardinaux*

On dit que A et B ont le même cardinal lorsqu'il existe une application bijective de A vers B et on note $|A| = |B|$. On note $|A| \neq |B|$ dans le cas contraire. On dit que le cardinal de A est inférieur ou égal à celui de B et on note $|A| \leq |B|$ s'il existe une application injective de A vers B. On note enfin $|A| < |B|$ lorsque $|A| \leq |B|$ et $|A| \neq |B|$.

$\boxed{\text{I.A.5.a.1.}}$ $|A| \leq |B| \iff$ *Il existe une application surjective de B vers A.*

$\boxed{\text{I.A.5.a.2.}}$ $\big(|A| \leq |B| \text{ et } |B| \leq |C|\big) \implies |A| \leq |C|$.

$\boxed{\text{I.A.5.a.3.}}$ $A \subset B \implies |A| \leq |B|$.

b) *Théorème de Cantor-Bernstein*

$\boxed{\text{I.A.5.b.1.}}$ $\big(|A| \leq |B| \text{ et } |B| \leq |A|\big) \implies |A| = |B|$.

c) *Théorème de Cantor*

$\boxed{\text{I.A.5.c.1.}}$ $|\mathscr{P}(A)| > |A|$.

d) *Ensembles finis, dénombrables et infinis*

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ (cf. I.C.1) et si A est un ensemble alors :
- A est dit fini si $|A| < |\mathbb{N}|$.
- A est dit dénombrable si $|A| \leq |\mathbb{N}|$.
- A est dit infini si $|A| \geq |\mathbb{N}|$.

$\boxed{\text{I.A.5.d.1.}}$ *A est fini* $\iff \exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $|A| = |[\![1, n]\!]|$.

$\boxed{\text{I.A.5.d.2.}}$ *$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$ non nuls, on a $\big(|[\![1,n]\!]| \leq |[\![1,p]\!]| \iff n \leq p\big)$ et $\big(|[\![1,n]\!]| = |[\![1,p]\!]| \iff n = p\big)$.*

On déduit que si A est un ensemble fini alors $\exists! n \in \mathbb{N}$ tel que $|A| = |[\![1,n]\!]|$. On dit dans ce cas que A est de cardinal n et on note $|A| = n$.

$\boxed{\text{I.A.5.d.3.}}$ *Si A est une partie d'un ensemble fini E telle que $|A| = |E|$ alors $A = E$.*

$\boxed{\text{I.A.5.d.4.}}$ *Si f est une application d'un ensemble fini vers un autre ensemble fini de même cardinal alors on a (f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective).*

$\boxed{\text{I.A.5.d.5.}}$ *Toute partie d'un ensemble fini est finie et toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.*

$\boxed{\text{I.A.5.d.6.}}$ *L'image par une application d'un ensemble fini est finie et l'image par une application d'un ensemble dénombrable est dénombrable.*

$\boxed{\text{I.A.5.d.7.}}$ *Le produit cartésien d'une famille finie d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.*

$\boxed{\text{I.A.5.d.8.}}$ *Si A et B sont dénombrables alors on a $|A| \geq |B|$ ou $|A| < |B|$.*

e) Généralisation de la réunion et de l'intersection

Si $(A_n)_{n\in K}$ est une famille d'ensembles indexée dans un ensemble K alors on définit la réunion et l'intersection d'une telle famille de la manière suivante :

$$x \in \bigcup_{n\in K} A_n \iff \exists n \in K, x \in A_n$$

$$x \in \bigcap_{n\in K} A_n \iff \forall n \in K, x \in A_n$$

La réunion ou l'intersection est dite finie si K est fini ou encore dénombrable si K est dénombrable.

$\boxed{\text{I.A.5.e.1.}}$ *Si $(A_n)_{n\in K}$ est une famille de sous-ensembles d'un ensemble E indexée dans un ensemble K alors :*

$$\complement_E\left(\bigcup_{n\in K} A_n\right) = \bigcap_{n\in K} \complement_E(A_n) \text{ et } \complement_E\left(\bigcap_{n\in K} A_n\right) = \bigcup_{n\in K} \complement_E(A_n)$$

$\boxed{\text{I.A.5.e.2.}}$ *Si E et F sont deux ensembles, f une application de E vers F et $(A_n)_{n\in K}$ une famille de sous-ensembles de F indexée dans un ensemble K alors :*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in K} A_n\right) = \bigcup_{n\in K} f^{-1}(A_n) \text{ et } f^{-1}\left(\bigcap_{n\in K} A_n\right) = \bigcap_{n\in K} f^{-1}(A_n)$$