TSI
2e année

Lionel Vidal
Christophe Aronica
Régis Bourdin
Stéphanie Calmettes
Elsa Choubert
Matthieu Demange
Nadège Demange
Ludovic Menguy
Vincent Parmentier
Nicolas Tancrez
Marc Venturi
Sylvie Zanier

PRÉPAS SCIENCES
COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

PHYSIQUE CHIMIE

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Résolutions de problèmes, activités numériques
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

2e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

Résumé de cours

Interaction électrique et champ

Charges électriques

La charge électrique est une grandeur scalaire intrinsèque, extensive et conservative, qui caractérise le comportement de la matière vis-à-vis de l'interaction électromagnétique ; elle peut être positive ou négative.
Elle est quantifiée : toutes les charges isolables sont multiples de la charge élémentaire $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C . La charge électrique est répartie de manière discontinue au niveau microscopique, là où sont les particules qui peuvent être considérées comme ponctuelles.

Loi de Coulomb

En électrostatique, on s'intéresse à des charges immobiles les unes par rapport aux autres. Alors les forces exercées par des charges q_1 et q_2 l'une sur l'autre sont données par la loi de Coulomb :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}}.$$

Elles sont attractives si les charges sont de signe opposé ($q_1 q_2 < 0$) et répulsives si les charges sont de même signe ($q_1 q_2 > 0$).

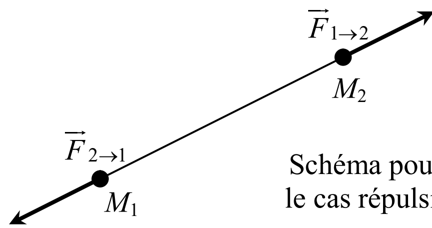


Schéma pour le cas répulsif

La constante ε_0 est la permittivité diélectrique du vide et vaut $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F·m^{-1} .

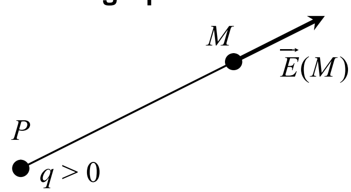
Notion de champ électrostatique

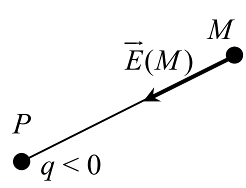
On peut décrire indirectement l'interaction électrique en faisant intervenir la notion de champ :
– des charges immobiles créent en un point M un champ électrostatique $\vec{E}(M)$;
– une charge q placée au point M subit alors une force électrique $\boxed{\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)}$.

Champ créé par une charge ponctuelle

Le champ créé en un point M par une charge q immobile en un point P est :

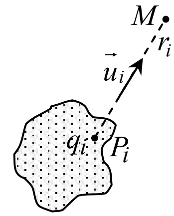
$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}.$$





Principe de superposition, champ créé par une distribution discrète

Le champ créé par une charge est indépendant de la présence d'autres charges. De plus les forces s'additionnent vectoriellement, donc le champ créé par un ensemble de charges est la somme vectorielle des champs créés par chaque charge individuellement. Ainsi le champ créé en un point M par un ensemble de charges ponctuelles q_i situées aux points P_i est :



$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i\,\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i\,\vec{u}_i}{r_i^2}} \text{ où } \vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|} \text{ et } r_i = \left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|.$$

■ Champ créé par une distribution continue de charges

❑ Distribution volumique

Si $\mathrm{d}\tau(P)$ est un volume élémentaire contenant la charge $\mathrm{d}q(P)$ à l'instant t autour du point P d'une distribution de charge (D), on définit la densité volumique de charge par $\boxed{\rho(P) = \dfrac{\mathrm{d}q(P)}{\mathrm{d}\tau(P)}}$ en $\boxed{\mathrm{C \cdot m^{-3}}}$. La charge totale de la distribution est alors obtenue par : $Q = \int_D \rho(P)\,\mathrm{d}\tau(P)$, où $\int_D$ désigne ici la triple sommation continue sur (D).

Remarque

La densité volumique $\rho(P)$ est définie à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire à une échelle de dimension assez faible à l'échelle macroscopique pour qu'elle soit localement représentative du milieu et de dimension suffisamment grande à l'échelle microscopique pour que la notion de moyenne ait un sens. Ainsi, $\rho(P)$ est une grandeur locale et moyennée. À cette échelle, la distribution est continue (l'aspect corpusculaire caractéristique de l'échelle atomique est lissé par le processus de moyenne), d'où l'usage de sommes continues.

❑ Distribution surfacique

La distribution surfacique est la limite d'une réalité volumique où les charges sont réparties sur une petite épaisseur a avec une densité volumique de ρ, la densité surfacique correspondante est, si la distribution est uniforme, $\sigma = \lim\limits_{a \to 0} \rho a$. La charge portée par une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ centrée sur P s'écrit : $\boxed{\mathrm{d}q = \sigma(P)\,\mathrm{d}S}$, où $\sigma(P)$ est la **densité surfacique de charge** au point P.

❑ Distribution linéique

C'est la limite d'une réalité volumique « filiforme » lorsque sa section tend vers zéro.

La charge portée par un élément de longueur $\mathrm{d}l$ centré sur P s'écrit : $\boxed{\mathrm{d}q = \lambda(P)\,\mathrm{d}l}$, où $\lambda(P)$ est la **densité linéique de charge** au point P.

❑ Correspondance entre les éléments de charge

Les éléments de charge dans les descriptions volumique, surfacique et linéique sont liés par : $\boxed{\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}\tau = \sigma\,\mathrm{d}S = \lambda\,\mathrm{d}l}$.

■ Symétries de la distribution de charges et du champ

❑ Principe de Curie

Le principe de symétrie de Curie postule que « les effets ont au moins les symétries des causes ». Appliqué à l'électrostatique, ce principe implique donc que le champ électrostatique a au moins les mêmes symétries que la distribution de charges.

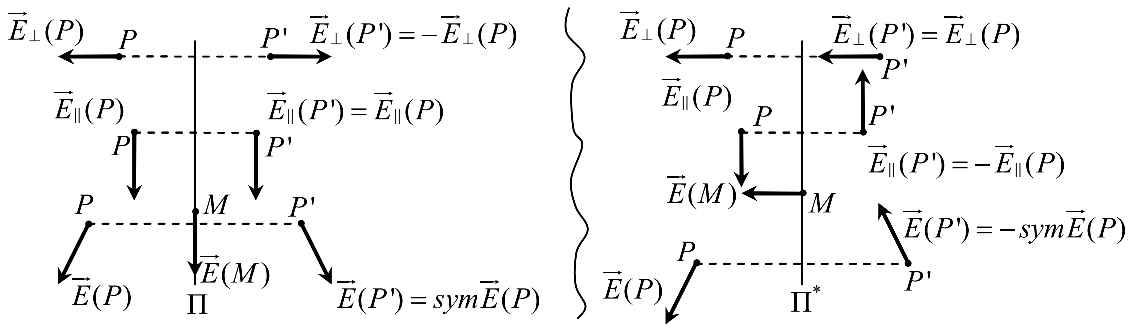
❑ Plans de symétrie et d'antisymétrie

Plan de symétrie

Un plan Π est plan de symétrie d'une distribution volumique de charges si, quels que soient les points P et P' symétriques par rapport à Π, $\rho(P') = \rho(P)$.

Ce plan est alors également un plan de symétrie pour le champ : $\vec{E}(P')$ est le symétrique de $\vec{E}(P)$, donc leurs composantes parallèles au plan sont égales et celles orthogonales au plan sont opposées.

En particulier, *en un point M d'un plan de symétrie, le champ est contenu dans ce plan.*



Plan d'antisymétrie

Un plan Π^* est plan d'antisymétrie d'une distribution volumique de charges si, pour tous points P et P' symétriques par rapport à Π^*, $\rho(P') = -\rho(P)$.

Ce plan est alors également un plan d'antisymétrie pour le champ : $\vec{E}(P')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{E}(P)$, donc leurs composantes parallèles au plan sont opposées et celles orthogonales au plan sont égales.

En particulier, *en un point M d'un plan d'antisymétrie, le champ est orthogonal à ce plan.*

⇨ **Méthode 1.1. Comment déterminer la direction du champ ?**

❑ Invariances

Invariance par translation

Si la distribution de charges est invariante par translation selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Invariance par rotation autour d'un axe (symétrie de révolution)

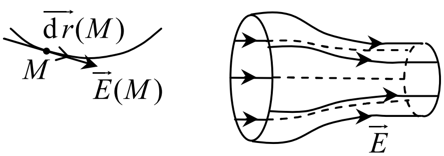
Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

Invariance par rotation autour d'un point (symétrie sphérique)
Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un point, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc d'aucune coordonnée angulaire.

⇨ **Méthode 1.2. Comment déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ ?**

■ Lignes et tubes de champ

Une **ligne de champ** de $\vec{E}$ est une courbe tangente au champ $\vec{E}$ en chacun de ses points.
Équation d'une ligne de champ : elle est obtenue en écrivant que $\vec{E}$ est localement tangent à un élément $\mathrm{d}\vec{r}(M)$ de la ligne de champ au point M, c'est-à-dire en explicitant le fait que $\vec{E}(M) \wedge \mathrm{d}\vec{r}(M) = \vec{0}$ dans le système de coordonnées adapté aux symétries du problème.
Un plan de symétrie contient entièrement une infinité de lignes de champ.
Un plan d'antisymétrie est orthogonal aux lignes de champ en chacun de ses points.

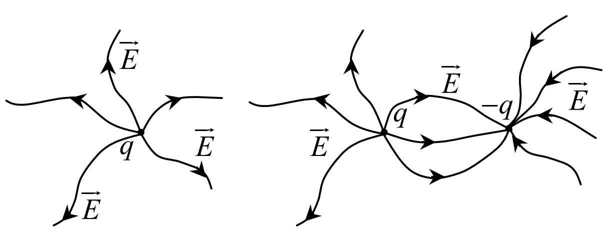


Un **tube de champ** est une surface (ouverte) formée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée. On peut le fermer à ses extrémités pour former une surface fermée.

⇨ **Méthode 1.3. Comment jongler avec l'orientation des surfaces ?**

❑ Topographie des lignes de champ

L'équation locale de (M.G) traduit le fait que $\vec{E}$ est à divergence non nulle en présence de charges c'est-à-dire de monopôles électrostatiques. Les lignes de champs de $\vec{E}$ divergent à partir du point P vers l'infini si la charge est positive et convergent vers P depuis l'infini si elle est négative. De façon plus générale, il apparaît que $\vec{E}$ diverge en partant de charges positives et converge vers des charges négatives comme le montre la cartographie des lignes de champ ci-dessous.



■ Théorème de Gauss

❑ Flux du champ électrostatique

Le flux du champ électrostatique au travers d'une surface Σ est par définition :

$$\Phi(\vec{E})_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n}\,.$$

$\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal (localement) à la surface Σ. Le choix du sens de $\vec{n}$ revient à orienter la surface, en fonction de l'orientation de son contour.

⇨ **Méthode 1.3. Comment jongler avec l'orientation des surfaces ?**

Si la surface n'est pas plane, $\vec{n}$ n'est pas partout le même mais il est toujours dirigé du même côté de la surface.

Pour une surface fermée (entourant complètement un certain volume), $\vec{n}$ est dirigé soit vers l'extérieur de la surface (on parle alors de flux sortant), soit vers l'intérieur (flux entrant).

❑ Théorème de Gauss

Le flux sortant du champ électrostatique au travers d'une surface fermée Σ est égal à la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface, divisée par la constante ε_0 :

$$\boxed{\oiint_\Sigma \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}\,.$$

⇨ **Méthode 1.4. Utiliser le théorème de Gauss**

❑ Formulation locale du théorème de Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss (M.G) : $\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ traduit localement le théorème de Gauss.

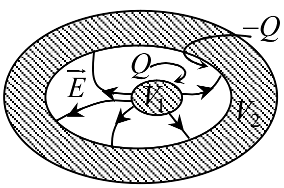
Remarque

Le théorème de superposition pour le champ découle de la linéarité de cette équation locale liant source et champ.

■ Condensateur

❑ Notion de condensateur

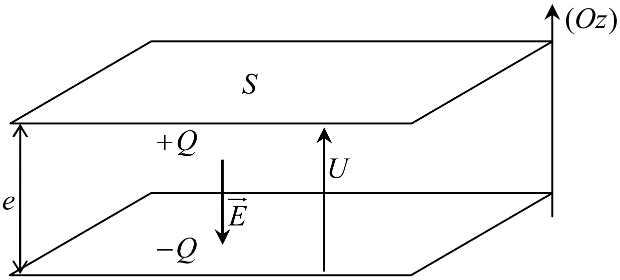
Deux conducteurs en regard, portés à des potentiels différents, forment un condensateur lorsque toutes les lignes de champ partant de la surface du conducteur de plus haut potentiel arrivent sur celle de plus bas potentiel. Les deux surfaces en regard, dites armatures du condensateur, portent alors des charges opposées. Cette définition impose dans la pratique que l'un des conducteurs est creux et entoure totalement l'autre. Dans le cas contraire, les **effets de bords doivent être négligés**.



$V_1 > V_2$

❑ Description et modélisation

Un condensateur plan est constitué de deux surfaces planes conductrices appelées armatures, placées l'une en face de l'autre et séparées par un isolant. On note S la surface des armatures et e la distance qui les sépare. On considère ici que l'isolant est le vide.



Lorsque le condensateur est chargé, ses armatures portent des charges égales en valeur absolue et de signe opposé $-Q$ et $+Q$, réparties uniformément sur les armatures avec des densités surfaciques $\pm\sigma = \pm\dfrac{Q}{S}$. Dans le cas où la distance entre les armatures est très inférieure à leurs dimensions, on peut modéliser le condensateur chargé par deux plans infinis uniformément chargés. Le champ électrostatique entre les armatures a pour expression :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_z} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\overrightarrow{e_z}}.$$

À l'extérieur des armatures : $\vec{E} = \vec{0}$.

❑ Capacité

La capacité d'un condensateur est le rapport entre la charge portée par l'armature positive et la différence de potentiel entre les armatures : $\boxed{C = \dfrac{Q}{U}}$.

Pour un condensateur plan : $\boxed{C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}}$.

❑ Théorème de Gauss pour le champ de gravitation

La loi de Coulomb et la loi de la gravitation en physique classique ont des expressions tout à fait analogues. On peut donc transposer les notions vues en électrostatique, et notamment le théorème de Gauss, aux forces de gravitation. Il suffit pour cela de remplacer les charges par les masses et la constante $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ par $-G$: $\boxed{\oint\!\!\oint_\Sigma \vec{\mathcal{G}}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n} = -4\pi G M_{\text{int}}}$.

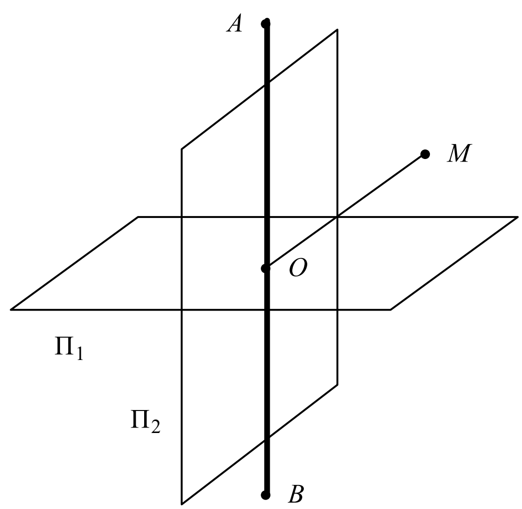
Dans cette expression, $\vec{\mathcal{G}}$ est le champ gravitationnel et $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ (SI) est la constante de gravitation.

❑ Méthode 1.1. Comment déterminer la direction du champ ?

→ Préciser d'abord en quel point on recherche la direction du champ électrostatique. Cela peut être un point bien particulier, un point sur un axe, un point sur un plan ou n'importe quel point de l'espace.
→ Rechercher ensuite des plans de symétrie *qui passent par le point considéré* : la direction du champ est l'intersection de ces plans.
→ On peut également rechercher un plan d'antisymétrie *qui passe par le point considéré* : la direction du champ est alors orthogonale à ce plan.

⇨ **Exercices 1.1 à 1.5**

– *Exemple 1* : segment uniformément chargé en longueur.
On considère un fil rectiligne de longueur $L = AB$, de milieu O, qui porte une charge uniformément répartie avec une charge linéique λ. On s'intéresse au champ dans le plan médiateur du segment, Π_1.
Le point M considéré est ici un point quelconque du plan médiateur du segment. Il y a deux plans de symétrie qui passent par ce point M : le plan médiateur Π_1 lui-même et le plan Π_2 qui contient le segment et le point M. La direction du champ est l'intersection de ces deux plans, donc la droite (OM).



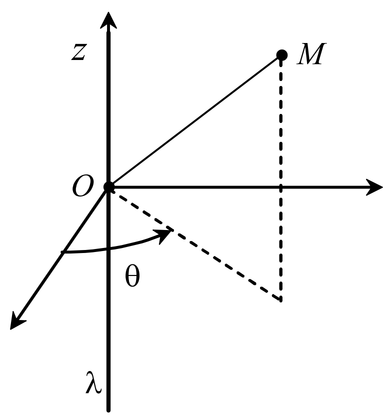
– *Exemple 2* : sphère uniformément chargée en volume.
On considère une sphère de centre O et de rayon R qui porte une charge uniformément répartie à l'intérieur avec une charge volumique ρ. On s'intéresse au champ en tout point de l'espace.
Le point M considéré est ici un point quelconque. Comme tout plan qui contient le centre de la sphère est plan de symétrie, il y a une infinité de plans de symétrie qui contiennent M. Quels que soient ceux que l'on considère, leur intersection est la droite (OM) qui est donc la direction du champ (on dit que le champ est radial) ; on note explicitement : $\overrightarrow{E}(M) = E_r(M)\overrightarrow{e_r}$.

❑ Méthode 1.2. Comment déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ ?

Rechercher les invariances de la distribution de charges, puis choisir le bon système de coordonnées et déterminer celles dont dépend le champ électrostatique.
→ Invariance par translation le long d'un axe : utiliser la coordonnée linéaire sur cet axe. Le champ ne dépend pas de cette coordonnée.
→ Invariance par rotation autour d'un axe de symétrie : utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec l'axe de symétrie comme axe (Oz). Les composantes du champ (donc sa norme) ne dépendent pas de la coordonnée angulaire θ.
→ Invariance par rotation autour d'un point de symétrie : utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, φ) avec le point de symétrie comme origine. Les composantes du champ ne dépendent pas des coordonnées angulaires θ et φ.

⇨ **Exercices 1.1 à 1.5**

– *Exemple 1* : fil infini uniformément chargé en longueur.
On considère un fil rectiligne infini qui porte une charge uniformément répartie avec une charge linéique λ.
On utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,z), l'axe (Oz) coincidant avec le fil chargé, pour repérer la position d'un point M où l'on cherche le champ.
La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe (Oz), les composantes du champ ne dépendent donc pas de θ.
La distribution de charges est invariante par translation le long de l'axe (Oz), le champ ne dépend donc pas de z.
Les composantes du champ ne dépendent donc que de r.
Il ne peut y avoir invariance par translation que si la distribution de charges s'étend jusqu'à l'infini (c'est un modèle).



– *Exemple 2* : sphère uniformément chargée en volume.
On a déjà vu que $\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques. La distribution de charges est invariante par rotation autour du point O, la coordonnée radiale qui ici est **la norme du champ** ne dépend donc pas de θ et φ : $E_r(M) = E_r(r)$, on note explicitement : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$.