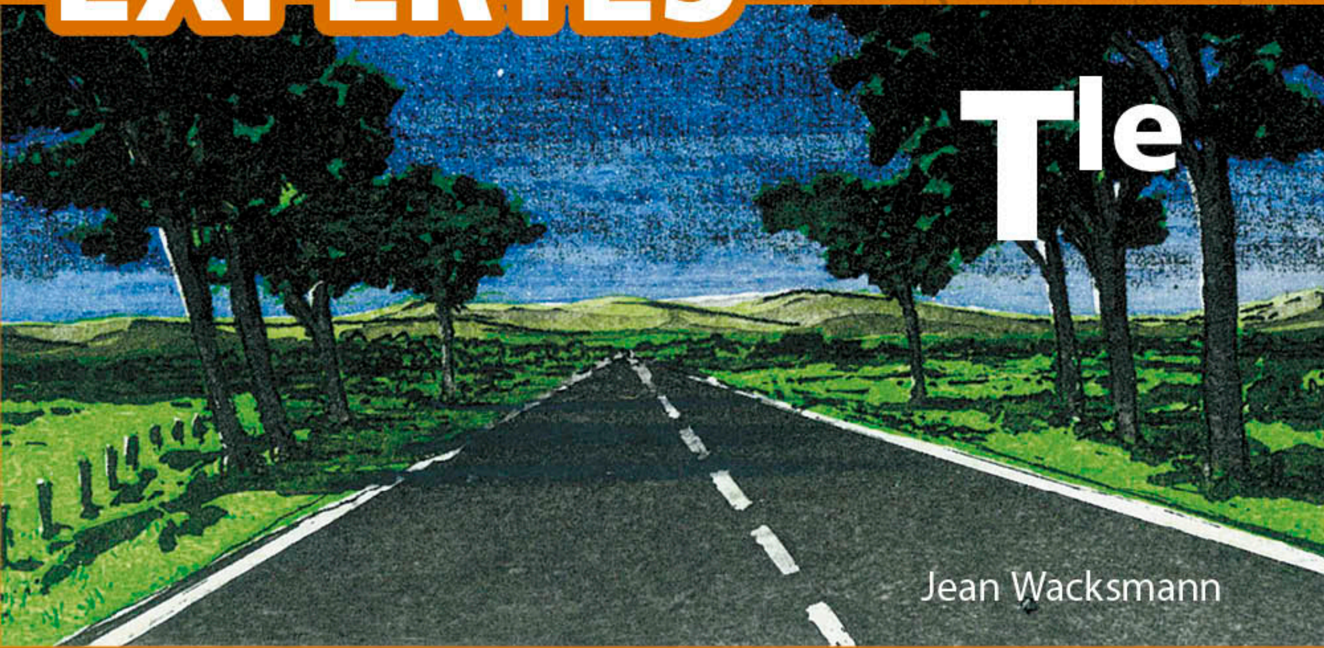
# MATHÉMATIQUES EXPERTES



# T^le^

Jean Wacksmann

## Pour aller plus loin
### en démontrant et en s'entraînant

NOUVEAUX PROGRAMMES !

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \geq \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

ellipses

CHAPITRE 1

# Les nombres complexes

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Plus généralement nous savons qu'une équation du second degré qui a un discriminant strictement négatif n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Au XVIe siècle, des mathématiciens algébristes italiens, comme Tartaglia (1499-1557), Cardan (1501-1576) puis Bombelli (1526-1572) sont confrontés à cette difficulté en étudiant la résolution des équations du troisième degré de la forme $x^3 = px + q$, avec $p$ et $q$ positifs. C'est à Bombelli, pour résoudre l'équation $x^3 = 15x+4$, que l'on doit l'introduction de $\sqrt{-1}$ qualifiée de nombre imaginaire.

Au XVIIIe siècle, le mathématicien suisse Leonard Euler (1707-1783) introduit la notation $i = \sqrt{-1}$. Ainsi formellement, nous obtenons

$$i^2 = -1.$$

C'est également à Euler que nous devons la forme forme exponentielle d'un nombre complexe qui est présentée dans ce livre au chapitre 2.

Au XIXe siècle, le mathématicien Carl Friedrich Gauss (1777-1855) établit une correspondance entre le couple de réels $(a, b)$ et le nombre complexe $a+bi$. Cette idée permet une construction de l'ensemble des nombres complexes et de développer la représentation géométrique de ses derniers.

Nous proposons ici une introduction axiomatique de cet ensemble et de sa structuration algébrique.

## 1.1 L'ensemble des nombres complexes

### 1.1.1 Axiomatique

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes et un élément $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.
• $\mathbb{C}$ est muni d'une égalité qui prolonge l'égalité des réels.
• $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ .
• Tout nombre complexe s'écrit sous la forme $a + bi$, avec $a$ et $b$ réels.

**Remarques.** Nous en faisons deux.

- $i$ est appelé un nombre imaginaire.
- Cette axiomatique permet de faire immédiatement de nombreux calculs algébriques dans $\mathbb{C}$. Nous illustrons cette remarque par les exemples qui suivent.

**Exemple.** Équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

▷ Équation $x^2 + 1 = 0$.

Nous résolvons cette équation en utilisant l'extension à $\mathbb{C}$ de l'addition et de la multiplication des nombres réels. Il vient

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (x + i)(x - i) = 0,$$
$$\Leftrightarrow x + i = 0 \text{ ou } x - i = 0 \Leftrightarrow x = -i \text{ ou } x = i.$$

Nous en concluons que l'équation $x^2 = -1$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions imaginaires : $x = -i$ ou $x = i$.

▷ Équation $x^2 + x + 1 = 0$.

Cette équation a un discriminant $\Delta < 0$ donc elle n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Comme nous disposons des règles de calcul usuelles, nous résolvons cette équation en mettant sous sa forme canonique le trinôme $x^2+x+1$, avec $x \in \mathbb{C}$.

Nous obtenons

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \times\frac{1}{2} \times x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0,$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}i^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0,$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0 \text{ ou } x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0,$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ou } x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Nous en concluons que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions complexes : $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

**Exemple.** Calculs dans $\mathbb{C}$.

$\triangleright$ Nous déterminons $i^0$, $i^1$, $i^2$, $i^3$, $i^4$.

Il vient

$$\begin{gathered} i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1, \\ i^3 = i \times i^2 = -i, \\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1. \end{gathered}$$

$\triangleright$ Nous en déduisons le calcul de $i^{2021}$ en observant que l'égalité $i^0 = i^4 = 1$ induit une période de 4 dans le calcul des puissances successives de $i$.

Ainsi, en effectuant la division euclidienne de 2021 par 4, nous obtenons

$$i^{2021} = i^{4\times 505+1} = (i^4)^{505} \times i^1 = i.$$

$\triangleright$ Nous calculons $(1+i)^2$ puis $(1+i)^3$. Il vient

$$\begin{gathered} (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i, \\ (1+i)^3 = 2i(1+i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i. \end{gathered}$$

**Proposition.** $\mathbb{R}$ *est inclus dans* $\mathbb{C}$.

**Démonstration.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Puisque $0 = 0 \times i$, nous avons

$$a = a + 0 \times i,$$

ce qui justifie que $a \in \mathbb{C}$.

Nous en concluons

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

**Définitions.** *Soit un nombre complexe $z = a + bi$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.*

- *L'écriture $a + bi$ est la* forme algébrique *du complexe $z$.*
- *Le réel $a$ est la* partie réelle *de $z$, notée $\mathcal{R}e(z)$.*
- *Le réel $b$ est la* partie imaginaire *de $z$, notée $\mathcal{I}m(z)$.*
- *Lorsque $a = 0$, le complexe $z = bi$ est* imaginaire pur.

*L'ensemble des imaginaires purs est noté $\mathbb{R}i$, ce qui donne*

$$\mathbb{R}i = \{bi / b \in \mathbb{R}\}.$$

### 1.1.2 Égalité dans $\mathbb{C}$

**Proposition.** *Soient $z = a+bi$ et $z' = a'+b'i$, avec $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a',\, b') \in \mathbb{R}^2$.*

*Nous disposons de l'équivalence*

$$z = z' \Leftrightarrow a = a' \,\text{et}\, b = b'.$$

**Démonstration.** Si $z = z'$, alors

$$a + bi = a' + b'i, \text{ ce qui implique } a - a' = (b' - b)i.$$

Par l'absurde, nous supposons que $b \neq b'$.

Ainsi nous en déduisons

$$\frac{a - a'}{b' - b} = i, \text{ avec } \frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R},$$

ce qui est contradictoire puisque $i \notin \mathbb{R}$.

Nous en concluons que $b = b'$ et par conséquent $a = a'$.

Réciproquement, si $a = a'$ et $b = b'$, alors il est immédiat que $z = z'$.

**Remarque.** Cette proposition définit l'égalité dans $\mathbb{C}$ et assure l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

**Corollaire.** *Soient deux complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a',\, b') \in \mathbb{R}^2$. Nous disposons des équivalences suivantes :*

- $z \neq z'$ *si et seulement si* $a \neq a' \,\text{ou}\, b \neq b'$,
- $z = 0$ *si et seulement si* $a = 0 \,\text{et}\, b = 0$,
- $z \neq 0$ *si et seulement si* $a \neq 0 \,\text{ou}\, b \neq 0$.

**Démonstration.** Le premier point est la négation de $z = z'$.

Le second point est le cas particulier où $a' = b' = 0$.

Le troisième point est la négation de $z = 0$.

**Exemple.** Racines carrées de $2i$.

Nous résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 2i$.

Pour cela, nous posons $z = x + yi$ ; avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Nous en déduisons l'équation à deux inconnues, notée (1),

$$(x + yi)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 2i.$$

Par définition de l'égalité dans $\mathbb{C}$, (1) équivaut au système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = -y \\ xy = 1 \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = x \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x^2 = -1 \\ y = -x \end{cases}.$$

Puisque le système $\begin{cases} x^2 = -1 \\ y = -x \end{cases}$ n'a pas de solution, nous en déduisons

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Par conséquent, si $z^2 = 2i$, alors nous obtenons $z = 1 + i$ ou $z = -(1+i)$.

Réciproquement, nous vérifions que les nombres complexes $z = 1 + i$ ou $z = -(1+i)$ sont solutions de l'équation $z^2 = 2i$.

Nous en concluons que cette équation admet deux solutions distinctes opposées qui sont les complexes $1 + i$ ou $-1 - i$. Ces deux complexes sont les racines carrées de $2i$.

## 1.2 Addition - Multiplication dans $\mathbb{C}$

### 1.2.1 Addition

La définition et les propriétés qui suivent sont justifiées par l'extension à $\mathbb{C}$ de l'addition des réels.

**Définition.** *Soient deux complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a', b') \in \mathbb{R}^2$. L'addition de ces deux complexes est définie par*

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i$$

**Remarques.** Nous en faisons deux.

- Lorsque $b = b' = 0$, nous retrouvons l'addition dans $\mathbb{R}$.
- Cette définition justifie que $\mathbb{C}$ est stable pour son addition, c'est-à-dire

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, z + z' \in \mathbb{C}.$$

**Proposition** (propriétés de $(\mathbb{C}, +)$). *L'ensemble des nombres complexes muni de son addition, noté $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire :*

- *l'addition dans $\mathbb{C}$ est commutative,*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z,$$

- *l'addition dans $\mathbb{C}$ associative,*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, \forall z'' \in \mathbb{C}, z + (z' + z'') = (z + z') + z''.$$

- $0$ *est l'élément neutre de cette addition,*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z,$$

- *tout nombre complexe $z$ admet un opposé $-z$ tel que*

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

**Démonstration.** Ces quatre propriétés sont justifiées en utilisant les propriétés de l'addition des nombres réels qui confèrent à $(\mathbb{R}, +)$ une structure de groupe commutatif.

**Remarques.** Nous en donnons quatre.

- $0 = 0 + 0i$ .
- Si $z = a + bi$, alors nous avons $-z = (-a) + (-b)i = -a - bi$.
- Soustraction dans $\mathbb{C}$.

  Quels que soient $z$ et $z'$ appartenant à $\mathbb{C}$, nous avons

$$z - z' = z + (-z').$$

- Dans $\mathbb{C}$, l'équation $\alpha + z = \beta$, où $\alpha$ et $\beta$ sont deux complexes donnés, admet pour unique solution $z = \beta - \alpha$.

### 1.2.2 Multiplication

**Lemme.** *Quels que soient les couples $(a, b)$ et $(a', b')$ de réels, nous avons*

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

**Démonstration.** Nous utilisons la distributivité de la multiplication sur l'addition étendue de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$. Il vient

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i,$$

ce qui justifie la définition qui suit.

**Définition.** *Soient deux complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a',\, b') \in \mathbb{R}^2$. La multiplication de ces deux complexes est définie par*

$$z \times z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

**Remarques.** Nous en faisons trois.

- Lorsque $b = b' = 0$, nous retrouvons la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- Cette définition justifie que $\mathbb{C}$ est stable pour sa multiplication, c'est-à-dire,

$$\forall z \in \mathbb{C},\, \forall z' \in \mathbb{C},\, z \times z' \in \mathbb{C}.$$

- $\mathbb{C}$ muni de sa multiplication est noté $(\mathbb{C},\, \times)$.

**Proposition** (propriétés de $(\mathbb{C},\, \times)$)**.** *La multiplication dans $\mathbb{C}$ est :*

- *commutative, c'est-à-dire*

$$\forall z \in \mathbb{C},\, \forall z' \in \mathbb{C},\, z \times z' = z' \times z,$$

- *associative, c'est-à-dire*

$$\forall z \in \mathbb{C},\, \forall z' \in \mathbb{C},\, \forall z'' \in \mathbb{C},\, (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'').$$

- $1 = 1 + 0i$ *est l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire*

$$\forall z \in \mathbb{C},\, z \times 1 = 1 \times z = z.$$

**Démonstration.** Le premier et le troisième point sont immédiats.

Nous justifions l'associativité.

Posons $z = a+bi$, $z' = a'+b'i$ et $z'' = a''+b''i$, avec $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a',\, b') \in \mathbb{R}^2$ et $(a'',\, b'') \in \mathbb{R}^2$.

D'une part, il vient

$$\begin{aligned}
(z \times z') \times z'' &= \big((a + bi) \times (a' + b'i)\big) \times (a'' + b''i), \\
&= \big((aa' - bb') + (ab' + a'b)i\big) \times (a'' + b''i), \\
&= (aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'' \\
&\qquad + i\left((aa' - bb')b'' + (ab' + a'b)a''\right), \\
&= (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - a'bb'' \\
&\qquad\quad + i(aa'b'' - bb'b'' + ab'a'' + aba'').
\end{aligned}$$

D'autre part, nous obtenons

$$\begin{aligned}
z \times (z' \times z'') &= (a+bi) \times \left((a'+b'i) \times (a''+b'')i\right), \\
&= (a+bi) \times \left((a'a''-b'b'') + (a'b''+a''b')i\right), \\
&= \left(a(a'a''-b'b'') - b(a'b''+a''b')\right) \\
&\qquad\qquad + i\left(a(a'b''+a''b') + b(a'a''-b'b'')\right), \\
&= (aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - ba''b') \\
&\qquad\qquad + i(aa'b'' + aa''b' + ba'a'' - bb'b''), \\
&= (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - a'bb'' \\
&\qquad\qquad + i(aa'b'' - bb'b'' + ab'a'' + aba'').
\end{aligned}$$

Ces deux calculs menés à bien prouvent l'égalité attendue, c'est-à-dire l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$.

**Remarque.** La commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$ justifie que la forme algébrique d'un nombre complexe $z$ peut s'écrire indifféremment

$$z = a + bi = a + ib, \text{ avec } (a,\, b) \in \mathbb{R}^2.$$

**Proposition** (inverse d'un nombre complexe non nul). *Quel que soit le complexe non nul $z$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}^*$ satisfaisant à l'égalité*

$$z \times z' = z' \times z = 1.$$

**Démonstration.** Soit $z = a + bi$ un complexe non nul donné, c'est-à-dire, avec $a \in \mathbb{R}^*$ ou $b \in \mathbb{R}^*$.

Nous résolvons l'équation $z \times z' = 1$ dont l'inconnue est $z' = a' + b'i$.

Cette équation est équivalente à

$$(aa' - bb') + (ab' + a'b)i = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases}.$$

Pour résoudre ce système nous procédons par combinaison linéaire, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{l|c|c} aa' - bb' = 1 & \times a & \times -b \\ ba' + ab' = 0 & \times b & \times a \end{array}\right.,$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases}(a^2+b^2)a'=a\\(b^2+a^2)b'=-b\end{cases}.$$

Puisque $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, nous avons $a^2+b^2 \neq 0$.

Par conséquent le système admet un unique couple solution $(a',\, b')$ tel que

$$a' = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ et } b' = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Nous en concluons que, le complexe $z = a + bi$ étant donné non nul, l'équation $z \times z' = 1$ admet une unique solution

$$z' = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Cette proposition permet de donner la définition qui suit.

**Définition.** *Tout nombre complexe $z = a + bi$ non nul admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ tel que*

$$z \times \frac{1}{z} = 1, \text{ avec } \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

**Remarques.** Nous en faisons trois.

• En pratique, pour obtenir la forme algébrique de $\frac{1}{a+bi}$, nous observons que

$$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 > 0,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Le nombre complexe $a - bi$, noté $\overline{z}$ est le conjugué de $z$.

Dans le paragraphe 1.4, nous développerons ses propriétés.

• Quotient de deux complexes.

Quels que soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$, nous avons

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}.$$

• La multiplication dans $\mathbb{C}^*$ est associative, commutative, a un élément neutre 1 et tout complexe non nul admet un inverse ce qui permet de préciser que $(\mathbb{C}^*,\, \times)$ est un groupe commutatif.