

Jean Franchini
Jean-Claude Jacquens

MATHS

Cours

Exercices et travaux dirigés corrigés

MP-MP*

MPI-MPI*

NOUVEAUX
PROGRAMMES !

ellipses

Table des matières

1. ALGÈBRE GÉNÉRALE	1
I. Groupes et sous-groupes	1
1. Groupes	1
2. Produit de groupes	1
3. Sous-groupes	1
4. Génération	2
5. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$	4
II. Morphismes de groupes	5
1. Définition	5
2. Propriétés	5
III. Groupes monogènes et cycliques	6
1. Congruence modulo n	6
2. Morphisme canonique	7
3. Groupes cycliques	7
IV. Anneaux	8
1. Définitions	8
2. Idéaux d'un anneau commutatif	10
3. Idéaux de \mathbb{Z} ; anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$	12
V. Anneaux de polynômes à une indéterminée	14
VI. Algèbres	16
Exercices	17
Travaux dirigés	26
Dévissage du groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	26
Polynômes cyclotomiques	29
Corps des quaternions; théorème des quatre carrés	33
2. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES	37
I. Sommes directes	37
A. Somme	37
B. Définition et premières propriétés	37
C. Décomposition de E en somme directe	39
II. Sous-espaces vectoriels stables	40

III. Polynômes d'endomorphisme	41
A. Généralités	41
B. Théorème de décomposition des noyaux	43
IV. Éléments propres	45
A. Cas d'un endomorphisme	45
B. Cas d'une matrice	46
C. Polynôme caractéristique	47
D. Sous-espaces caractéristiques	51
V. Réduction en dimension finie	52
A. Diagonalisation	52
B. Trigonalisation	56
Exercices	58
Travaux dirigés	77
Matrices cycliques	77
Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$ de codimension 1	81
Matrice de Vandermonde	84
Décomposition de Dunford ; applications	86
Suites récurrentes linéaires	88
3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS	91
I. Normes et distances	91
A. Définitions	91
B. Exemples fondamentaux	94
C. Applications lipschitziennes	96
II. Suites	97
A. Nature d'une suite	97
B. Comparaison des normes	99
C. Suites extraites. Valeurs d'adhérence	100
III. Topologie d'un espace vectoriel normé	101
A. Voisinages, ouverts, fermés	101
B. Adhérence, intérieur, frontière	104
IV. Limites, continuité	105
A. Limites	105
B. Continuité	108
C. Continuité uniforme	111
V. Applications linéaires continues	112
VI. Compacité	113
VII. Espace vectoriel normé de dimension finie	116
VIII. Convexité	118

IX. Connexité par arcs	119
Exercices	121
Travaux dirigés	135
Des normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	135
Valeurs d'adhérence d'une suite ; applications	136
Morphismes continus entre les groupes $GL_n(\mathbb{C})$ et \mathbb{C}^* .	139
4. SÉRIES	141
I. Généralités	141
A. Séries vectorielles	141
B. Structure d'espace vectoriel	142
C. Compléments sur les séries numériques	143
II. Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	144
Exercices	146
Travaux dirigés	152
Règle de Raabe-Duhamel	152
Développement asymptotique du reste d'une série de Riemann	154
Théorème du point fixe et applications	155
Groupement par paquets	156
Espaces ℓ^p	158
Transformation d'Abel ; premières applications	161
5. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS	163
I. Divers types de convergence de suites de fonctions	163
II. Continuité et limites uniformes	166
III. Approximations de fonctions	168
IV. Séries de fonctions	173
A. Divers modes de convergence	173
B. Propriétés de la somme	175
Exercices	176
Travaux dirigés	184
Théorèmes de Dini (MP*)	184
Un produit infini	187
Une convergence vers la fonction exponentielle	190
6. FONCTIONS VECTORIELLES	193
I. Dérivation	193
A. Définitions	193
B. Opérations	195

C. Fonctions de classe \mathcal{C}^k	198
II. Intégrale sur un segment	200
III. Dérivation et intégration	203
A. Primitives de fonctions continues	203
B. Accroissements finis	204
C. Formules de Taylor	206
D. Exemple des intégrales de Wallis	207
IV. Suites et séries de fonctions	207
A. Convergence en moyenne	207
B. Dérivation	208
V. Arcs paramétrés	210
Exercices	211
Travaux dirigés	223
Une suite de fonctions périodiques	223
Majoration d'une fonction dérivée	226
Théorème de Borel	228
Intégration approchée	230
Une racine carrée de fonction	233
Fonctions à variation bornée	236
7. INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE	241
I. Intégrales généralisées	241
A. Définitions	241
B. Propriétés	241
II. Intégration de relations de comparaison	246
A. Théorème	246
B. Applications	247
III. Intégrales et séries	248
A. Comparaison à une série numérique	248
B. Application à l'étude de séries	249
C. Passage à la limite sous l'intégrale	250
D. Intégrales à paramètre	252
E. Compléments sur la fonction Γ	254
Exercices	255
Travaux dirigés	275
Fonction définie par une intégrale	275
Convolution et régularisation	277
Transformation de Fourier	280
Transformation de Laplace	284
Méthode de Laplace ; application à la formule de Stirling	288

Calcul d'une intégrale	290
Formule des compléments	295
Développements asymptotiques de fonctions définies par une intégrale	297
8. SÉRIES ENTIÈRES	303
I. Rayon de convergence	303
A. Définitions	303
B. Détermination du rayon	304
II. Propriétés de la somme	307
A. Continuité	307
B. Intégration	307
C. Dérivabilité	308
III. Fonctions développables en série entière	309
A. Définitions	309
B. Séries de Taylor	310
C. Développements classiques	310
Exercices	312
Travaux dirigés	330
Théorème de Bernstein	330
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence	332
Inégalités de Cauchy ; applications	335
Une équation fonctionnelle	338
Un théorème de Hardy et Littlewood	343
9. ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS	349
I. Espaces préhilbertiens réels	349
A. Produit scalaire	349
B. Orthogonalité	352
C. Projection orthogonale	355
II. Espaces euclidiens	358
A. Expressions analytiques	358
B. Isomorphisme canonique	358
C. Adjoint d'un endomorphisme	359
D. Automorphismes orthogonaux	362
E. Endomorphismes symétriques	365
F. Endomorphismes normaux d'un espace euclidien	367
Exercices	369
Travaux dirigés	379
Matrice et déterminant de Gram	379
Théorème de Courant-Fischer et applications	382
Approximation d'une matrice de rang fixé	384

Conditionnement d'une matrice de Hilbert	389
Norme d'un endomorphisme symétrique	395
Formes positives et produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (MP*)	400
10. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES	405
I. Espaces probabilisés	405
II. Propriétés des probabilités	406
III. Probabilités conditionnelles et indépendance	408
IV. Variables aléatoires discrètes	411
V. Couple de variables aléatoires	412
VI. Lois discrètes usuelles	415
VII. Moments d'une variable aléatoire discrète	417
VIII. Fonctions génératrices	426
Exercices	428
Travaux dirigés	442
Autour des records	442
Somme aléatoire de variables aléatoires	446
Variables aléatoires entières décomposables	450
Variables aléatoires infiniment divisibles ; exemples	454
Variable aléatoire gaussienne	459
Étude du processus de Galton-Watson	462
11. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	473
I. Généralités	473
II. Équations linéaires scalaires d'ordre 1	473
III. Équations linéaires du premier ordre	476
IV. Équations scalaires d'ordre 2	482
Exercices	485
Travaux dirigés	495
Solutions pseudo-périodiques d'une équation différentielle	495
Équation différentielle de Bessel	500
Lemme de Gronwall ; applications	504
Fonctions oscillantes	507
12. CALCUL DIFFÉRENTIEL	513
I. Généralités	513
II. Opérations sur l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^1	516
III. Algèbre $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$	519

IV. Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$	523
Exercices	529
Travaux dirigés	540
Endomorphismes conservant un opérateur différentiel	540
Équation aux dérivées partielles	544
Optimisation, méthode du gradient (MP*)	548
INDEX	553