Mélanie **Blazère**

MATHS

+ COMPLÉMENT PYTHON

2e édition

Réviser et consolider les bases de Terminale

Réussir la 1re année ECG

ellipses

Chapitre 1

Ensembles et opérations

Ce premier chapitre est consacré au rappel de notions sur les ensembles, et notamment à la présentation des opérations élémentaires que l'on peut effectuer sur les ensembles. Nous commençons par présenter la notion d'ensemble ainsi que les ensembles usuels. Ensuite nous abordons la notion d'union et d'intersection d'ensembles. Ces opérations sont à maîtriser parfaitement, car nous y ferons appel lors de la résolution d'équations ou d'inéquations au moment d'écrire l'ensemble des solutions.

Sommaire

1.1 Rappel de cours

1.1.1 Généralités

Définition (Ensemble)

On appelle **ensemble** une collection ou un groupement d'objets distincts. Ces objets sont appelés les **éléments** de l'ensemble.
Afin d'énumérer les éléments d'un ensemble, on les notera entre accolade séparés par des virgules (,) ou des point-virgules (;).

Exemple 1.1

- L'ensemble E contenant les éléments a, b et c sera noté $E = \{a, b, c\}$ ou $E = \{a; b; c\}$.
- $E = \{0; \ln(2); 3\}$ est l'ensemble qui contient les réels 0, ln(2) et 3.

Remarque

1) Lorsqu'on travaille avec un ensemble dont les éléments sont des nombres décimaux, on privilégier le ; à , comme séparateur dans l'énumération des éléments, afin de ne pas confondre le séparateur (,) avec la virgule des nombres décimaux. Par exemple, l'ensemble contenant les deux décimaux $0,2$ et $7,8$ sera noté $\{0,2; 7,8\}$ et non $\{0, 2, 7, 8\}$ qui correspond à l'ensemble composé des quatre entiers 0, 2, 7 et 8.
2) Plutôt que de lister un à un tous les éléments d'un ensemble (ce qui n'est d'ailleurs pas faisable si l'ensemble contient une infinité d'éléments), on peut aussi le définir comme la partie d'un ensemble dotée d'une propriété. Par exemple, $E = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2\}$ correspond à l'ensemble des réels x qui vérifie que $x^2 = 2$ (la virgule se lit "tel que") .

Définition

- L'ensemble contenant aucun élément est un ensemble que l'on appelle l'**ensemble vide** et qui se note $\emptyset$.
- Soient p et q deux entiers naturels.
  On note $[\![p; q]\!] = \{n \in \mathbb{N},\ p \leq n \leq q\}$ l'ensemble des entiers compris entre p et q.

Exemple 1.2
$[\![1,4]\!] = \{1,2,3,4\}$.

Erreurs à éviter

Ne pas confondre $\{0,1\}$ qui est l'ensemble contenant les entiers 0 et 1 (et correspond donc aussi à $[\![0,1]\!]$) avec $[0,1]$ qui contient tous les réels compris entre 0 et 1.

1.1.2 Ensembles usuels

Voici les ensembles de nombres usuels que vous avez déjà vus au lycée.

Définition

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels
$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}.$$
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs
$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-32,\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,...,100,\ldots\}.$$
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, \text{où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\},$$
c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers.
Par exemple, $\frac{15}{7}$ et $-\frac{3}{4}$ sont dans $\mathbb{Q}$, mais pas $\sqrt{2}$ ni π.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

1.1.3 Intervalles

Définition (Intervalle)

Soient a et b deux réels.
L'ensemble des nombres réels compris entre deux nombres réels a et b se note $[a;b]$ et est appelé un **intervalle**.
On a ainsi $[a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.

Définition (Autre type d'intervalles)

Intervalle I	**Inégalité** $x \in \mathrm{I}$
$[a; +\infty[$	$x \geq a$
$]a; +\infty[$	$x > a$
$]-\infty; b]$	$x \leq b$
$]-\infty; b[$	$x < b$
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
$]a; b]$	$a < x \leq b$
$]a; b[$	$a < x < b$
$[a; b[$	$a \leq x < b.$

Exemple 1.3

- $]-3; 4[$ est l'ensemble des réels compris strictement entre -3 et 4.
- $[2; +\infty[$ est l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à 2.

Remarques

1) Par convention, les crochets sont toujours ouverts à l'infini.
2) $]-\infty; +\infty[$ est l'ensemble de tous les réels donc se note plus simplement $\mathbb{R}$.
3) Plus simplement, on notera :
   - $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ l'ensemble des réels positifs,
   - $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$ l'ensemble des réels négatifs,
   - $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ l'ensemble des réels strictement positifs,
   - $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$ l'ensemble des réels strictement négatifs.

1.1.4 Appartenance et inclusion

Définition (Appartenance et inclusion)

Soient E et A deux ensembles et x un élément de E.
On écrit :

- $x \in E$ pour signifier que x **appartient à** E (autrement dit que x est un élément de E).
- $x \notin E$ pour signifier que x **n'appartient pas** à l'ensemble E.
  C'est donc la négation de $x \in E$.
- A est dit **inclus** dans E si tout élément de A est un élément de E.
  On dit aussi que A est un **sous-ensemble** de E ou une partie de E et on écrit dans ce cas $A \subset E$.
- $A \not\subset E$ est la négation de $A \subset E$. Cela signifie qu'il existe **au moins** un élément de A qui n'est pas dans E.

Exemple 1.4
$3 \in [3;7]$, $7 \notin [3;7[$, $\{2;4;6\} \subset [0;8]$, $\{0;2;4\} \not\subset \mathbb{R}^*$ (car $0 \notin \mathbb{R}^*$).

Remarque

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Remarque (Ne pas confondre)

Il est très important de ne pas confondre la notion d'appartenance (qui s'utilise entre un élément et un ensemble) et la notion d'inclusion (qui s'utilise entre deux ensembles).
Ainsi, il est important surtout en prépa d'être très précis sur le vocabulaire.

1.1.5 Union et intersection d'ensembles

Définition (Intersection et union)

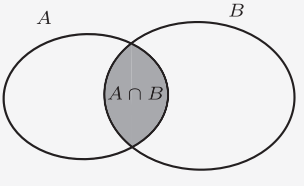
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

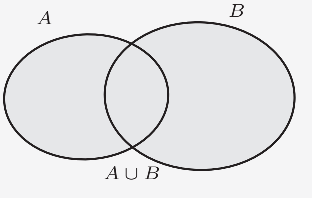
1) L'**intersection** de A et B, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** B :

$$x \in A \cap B \text{ équivaut à } (x \in A \textbf{ et } x \in B).$$

2) La **réunion** de A et B, noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **ou** B :

$$x \in A \cup B \text{ équivaut à } (x \in A \textbf{ ou } x \in B).$$





Exemple 1.5

1) $[1,2] \cap]-5,7[= [1,2]$.

2) $]-2,3] \cup \{-2\} = [-2,3]$.

3) $]-\infty,5[\cap [2,+\infty[= [2,5[$.

4) $]-\infty,4] \cup [3,+\infty[= \mathbb{R}$.

5) $[-3,2] \cap [7,+\infty[= \emptyset$.

Nous renvoyons le lecteur aux sous-sections 1.2.1 et 1.2.2 pour comprendre le calcul des unions et intersections ci-dessus.

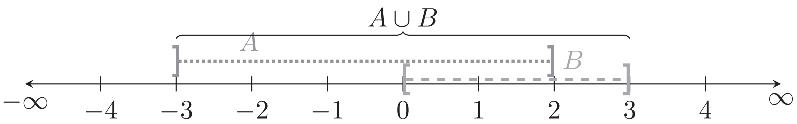
1.2 Méthodes

1.2.1 Union d'ensembles dans les réels

Méthode (Union)

Effectuer l'union de deux intervalles dans les réels A et B, noté $A \cup B$, consiste à trouver l'ensemble des éléments qui sont **soit** dans A **soit** dans B.
Pour ce faire et afin de n'oublier aucun élément, une technique efficace consiste à tracer la droite des réels et à représenter les intervalles A et B avec deux couleurs différentes.
L'ensemble $A \cup B$ sera alors constitué par les éléments dans **l'une ou l'autre** des couleurs.

Exemple 1.6
Calculer $A \cup B$, où $A =]-3; 2]$ et $B = [0; 3]$.
Nous ne pouvons représenter ici A et B avec des couleurs différentes.
Nous choisissons donc des points pour représenter A et des tirets pour représenter B.



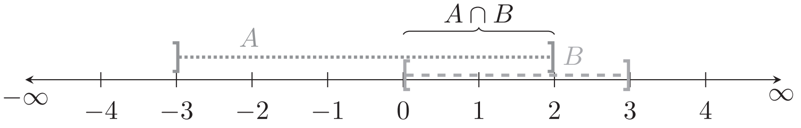
Nous pouvons ainsi conclure que $A \cup B =]-3; 3]$.

1.2.2 Intersection d'ensembles dans les réels

Méthode (Intersection)

Effectuer l'intersection de deux intervalles dans les réels A et B, noté $A \cap B$, consiste à trouver l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A **et** dans B.
Pour ce faire et afin de n'oublier aucun élément, une technique efficace consiste à tracer la droite des réels et à représenter les intervalles A et B avec deux couleurs différentes.
L'ensemble $A \cap B$ sera alors constitué par les éléments qui sont des **deux couleurs**.

Exemple 1.7
Calculer $A \cap B$, où $A =]-3; 2]$ et $B = [0; 3]$.
Nous ne pouvons représenter ici A et B avec des couleurs différentes.
Nous choisissons donc des points pour représenter A et des tirets pour représenter B.



Nous pouvons ainsi conclure que $A \cap B = [0; 2]$.

1.3 Pour s'entraîner

1.3.1 Exercices

Exercice 1.1
Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

1) $a \in E$?
2) $a \subset E$?
3) $\{a\} \subset E$?
4) $\emptyset \in E$?
5) $\emptyset \subset E$?
6) $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 1.2
Calculer :

1) $[-1; 2] \cap]0; 4[$.
2) $]-3; 2[\cup [1; 3]$.
3) $]-\infty; 1[\cap [0, +\infty[$.
4) $]-\infty; 2] \cup [0; 1[$.
5) $]-2; +\infty[\cap [0; +\infty[$.
6) $]-\infty; -1[\cap]1; +\infty[$.

1.3.2 Corrigés

Solution 1.1

1) Vrai (a est bien un élément de E, donc il appartient à E).
2) Faux (a est un élément et E un ensemble, donc la notion d'inclusion n'a pas de sens).
3) Vrai (car $\{a\}$ est un ensemble et E un ensemble, donc la notion d'inclusion a du sens et est vrai car a est un élément de E).
4) Faux ($\emptyset$ est un ensemble et E un ensemble, donc la notion d'appartenance n'a pas de sens).
5) Vrai (car $\emptyset$ qui est un ensemble est inclus dans n'importe quel autre ensemble).
6) Faux ($\emptyset$ est déjà un ensemble donc on n'écrit pas $\{\emptyset\}$).