IREM - Histoire des Mathématiques

HISTOIRES DE LOGARITHMES

ellipses

Chapitre I

INVENTIONS DE NOMBRES : CALCULS OU RÉSOLUTIONS ?

Invenire : venir sur, rencontrer, trouver, découvrir, inventer.

Les explicitations, que l'on rencontre avant le 17ème siècle, de la règle de multiplication des termes d'une suite géométrique par addition de leurs rangs sont parfois considérées comme des émergences prometteuses du concept de logarithme, chaque fois frôlé, mais non alors reconnu.

Pour examiner dans quelle mesure ces règles de calculs sur les rangs des termes des suites géométriques pourraient ou non constituer des étapes vers l'invention des logarithmes et l'élaboration des premières tables par John Napier [5, note p. 84] au début du 17ème siècle, nous allons ouvrir l'*Arénaire* qu'Archimède écrit à Syracuse au 3ème siècle avant J.-C., le *Triparty en la Science des nombres* de Nicolas Chuquet (Lyon, 1484) et l'*Arithmetica Integra* de Michael Stifel (Nuremberg, 1544), qui sont des ouvrages souvent cités à ce propos.

Dans la première partie de ce chapitre, nous reconnaîtrons que les mises en correspondance, rencontrées dans les extraits de référence, de suites géométriques et de suites arithmétiques à valeurs entières, naturelles ou relatives, ont peu à voir avec les outils de calcul numérique que Napier mettra en œuvre. En effet Chuquet et Stifel, agissant en algébristes, mettent les correspondances entre suites au service d'inventions de nombres qui sont le plus souvent des résolutions d'équations[1]. Et le calculateur Archimède, lui, manipule des nombres qui sont très distants les uns des autres.

Notre seconde partie sera consacrée à l'examen d'autres inventions de nombres, dues aux mêmes Chuquet et Stifel, travaillant alors en arithméticiens. Dans *Applications des Règles du Triparty*, Chuquet calcule ou approche avec finesse les solutions numériques de problèmes attachés à des phénomènes continus. Et Stifel, au livre I de son *Arithmetica Integra*, décrit des règles de multiplication et de division des proportions qui seront, le moment venu, absorbées par les règles de calculs sur les exposants fractionnaires.

---

[1] Le choix conventionnel de ces auteurs occidentaux étant induit par l'interprétation qui est usuellement faite de leurs textes et n'indiquant aucune prééminence qui leur serait attribuée à tort, nous signalerons, le moment venu, quelles primautés sont celles d'al-Karajī et d'as-Samaw'al sur les questions d'algèbre qui vont être abordées.

Ces regards ponctuels sur le terrain mathématique occidental dans lequel s'élabore l'invention de Napier permettront de se rendre compte que toutes les inventions de nombres ne relèvent pas de la même démarche. Les résolutions d'équations algébriques pour lesquelles les auteurs invoquent la relation fondamentale : $a^x \times a^y = a^{x+y}$ ont sans doute moins à voir avec l'invention de Napier que les résolutions de problèmes continus par approximation numérique ou l'élaboration des règles arithmétiques qui permettront de calculer avec les exposants fractionnaires à venir.

DES CALCULS SUR LES RANGS TRÈS EFFICACES

ARCHIMÈDE GRAND COMPTEUR

Dans son traité l'*Arénaire*, Archimède atteste la possibilité de dénombrer les grains de sable dont le volume serait celui du monde, et ceci, contre toute pratique courante à son époque, puisque les Grecs nommaient les nombres jusqu'à la myriade seulement.

Sa démarche est celle d'un astronome averti de ce que pourrait être le cosmos en l'état des connaissances ou des conjectures de ses contemporains, celle d'un technicien capable de pratiquer des visées et des mesures.

C'est celle aussi d'un géomètre qui, par des démonstrations, met en place des majorations successives du volume à nombrer.

C'est enfin celle d'un arithméticien qui invente les grands nombres dont il a besoin. Les nombres sont découverts en même temps qu'ils sont nommés, ou plutôt par le fait qu'ils sont nommés, et l'algorithme de dénomination accompagne le dénombrement. Les étapes successives du processus sont décrites, sans le recours à aucun symbolisme. Pour la transcription que nous proposons ci-dessous, nous cédons à la facilité et à la clarté de la notation exponentielle actuelle et nous posons, pour la myriade de myriades dont il va être question : $M = 10^8$.

Archimède rappelle que les noms des nombres sont connus jusqu'à dix-mille soit une myriade et poursuit.

Il explique qu'il est possible, sans moyens supplémentaires, d'énumérer les nombres allant de l'unité à la myriade de myriades ; ce sont les « premiers nombres ». $(1 \rightarrow M)$

Il introduit alors les « nombres seconds » qui se comptent de leur unité, la myriade de myriades des premiers nombres, à leur myriade de myriades, $(1 \times M \rightarrow M \times M)$

puis les « nombres troisièmes » qui se comptent de leur unité, la myriade de myriades des nombres seconds, à leur myriade de myriades, $(1 \times M^2 \rightarrow M \times M^2)$

les « nombres quatrièmes » qui se comptent de leur unité, la myriade de myriades des nombres troisièmes, à leur myriade de myriades. $(1 \times M^3 \rightarrow M \times M^3)$

Le dernier nombre recevant sa dénomination par itération de ce procédé est, ci-contre, la myriade de myriades des nombres cent-millionièmes. $\rightarrow M \times M^{M-1} = M^M$

La suite du traité montre que les nombres obtenus à ce stade sont assez grands pour majorer le nombre des grains de sable du monde, mais Archimède poursuit, emporté peut-être par la beauté du geste. Il appelle nombres de la première période tous les nombres qui ont été nommés jusqu'ici, (pour la présentation ci-dessous, nous posons : $P = M^M$), et procède alors à la désignation des nombres de la deuxième période, entamant ainsi la dénomination de nombres jusqu'à la dix-mille-myriadième période.

NOMBRES DE LA PREMIÈRE PÉRIODE	$1 \rightarrow P$
premiers nombres de la deuxième période	$1 \times P \rightarrow M \times P$
nombres seconds de la deuxième période	$1 \times MP \rightarrow M \times MP$
nombres troisièmes de la deuxième période	$1 \times M^2P \rightarrow M \times M^2P$
DEUXIÈME PÉRIODE TOUTE ENTIÈRE	$1 \times P \rightarrow M^M P = P \times P$
TROISIÈME PÉRIODE	$1 \times P^2 = P \times P^2$
DIX-MILLE-MYRIADIÈME PÉRIODE	$\rightarrow M \times M^{M-1} \times P^{M-1} = P \times P^{M-1} = P^M$

Le dernier nombre présenté est, comme le souligne l'écriture symbolique actuelle, celui qu'Archimède nomme la myriade de myriades des nombres dix-mille-myriadièmes de la dix-mille-myriadième période.

Ayant exposé tous ces nombres, Archimède les « range à partir de l'unité » dans la suite proportionnelle engendrée par dix. L'unité elle-même ayant le rang un, la myriade de myriades, par exemple, que nous avons notée : $M = 10^8$, a le rang neuf ; c'est son « éloignement de l'unité ».

Archimède énonce alors la règle qui a contribué à donner sa célébrité au traité :

> *Il est utile de connaître aussi ce qui suit. Si des nombres sont en proportion à partir de l'unité et que certains de ceux qui sont dans la même proportion sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même proportion éloigné du plus grand des facteurs d'autant de nombres dont le plus petit facteur est éloigné, en proportion, de l'unité, et il sera éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les facteurs sont éloignés de l'unité.* [1, p. 147-148]

Soit, en paraphrasant : le produit du terme de rang n par le terme de rang p est le terme de rang $n+p-1$, ou encore en écriture symbolique actuelle :

$$a^{n-1} \times a^{p-1} = a^{(n+p-1)-1} = a^{(n-1)+(p-1)}.$$

Pour donner une idée du travail d'Archimède, nous citons ci-dessous les dernières lignes de sa démonstration, où il utilise la règle précédente :

> *Et comme les mille unités de nombres septièmes représentent le cinquante-deuxième nombre à partir de l'unité dans la suite proportionnelle, et les dix-mille myriades de myriades le treizième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle, il est évident que le produit sera le soixante-quatrième nombre à partir de l'unité dans la même suite proportionnelle ; mais ce nombre est le huitième des nombres huitièmes, qui est de mille myriades de nombres huitièmes. Il est par conséquent évident* (à ce stade du raisonnement dans le traité) *que le nombre des grains de sable remplissant une sphère de la grandeur qu'Aristarque prête à la*

sphère des étoiles fixes est inférieur à mille myriades de nombres huitièmes. [1, p. 156]

Archimède est donc un mathématicien qui invente le moyen de résoudre un problème spécifique de son époque. Pour justifier la désignation des grands nombres dont il a besoin et les procédures de calculs qu'il utilise, il formule la règle fondamentale qu'aujourd'hui nous écrivons : $a^x \times a^y = a^{x+y}$. Elle lui permet de maîtriser un fini très grand, mais les nombres manipulés sont d'autant plus distants les uns des autres qu'ils sont plus grands. Dans le cadre de la distinction ancienne souvent reprise entre les quantités continues, c'est-à-dire géométriques et susceptibles d'être divisées à l'infini, et les quantités discontinues, c'est-à-dire numériques et susceptibles d'être augmentées à l'infini, Archimède s'intéresse ici à la seconde catégorie.

CHUQUET ET LA CLEF D'ENTRÉE EN LA SCIENCE DES NOMBRES

On trouve en [9] des indications sur la biographie de Nicolas Chuquet. Lui note à la fin de son manuscrit que, « parisien Bachelier en medecine », il a écrit son livre à « lyon sus le Rosne Lan de salut .1484. »

Cet ouvrage d'enseignement, tardivement connu et édité, se partage en *Le Triparty en la science des nombres* [4] et *Applications des règles du Triparty* [3].

Voici comment Chuquet présente son *Triparty* :

Ce livre a lonneur de la glorieuse et sacree trinite est divise en troys parties dont la premiere tracte des nombres en tant que on les peult nombrer adiouster soustraire multiplier et partir Et aussi de leurs proporcions progressions et aultres propretez. La seconde partie tracte des racines des nombres Et la tierce cest le livre des premiers ou de la rigle des premiers. [4, p. 41]

Cette composition en deux parties d'arithmétique – l'une relative aux nombres rationnels et l'autre relative aux nombres irrationnels – et une partie d'algèbre est classique en Occident depuis le *Liber Abaci* (1202-1228) de Fibonacci. Chuquet doit une grande part de sa notoriété à la « règle des premiers » qui occupe et désigne la partie algébrique du *Triparty*. Il est également souvent cité pour la connaissance qu'il a de la règle de multiplication des nombres proportionnels à laquelle nous nous intéressons.

Cette règle est énoncée au chapitre III de la première partie consacrée aux nombres :

Tous nombres proporcionalz constituez ordonneement en quelque proporcion que ce soit commancant toutesfoiz a .1. et comptant cellui qui vient immediatement apres .1. pour le premier et cellui dapres pour le second et consequemment les aultres. Telz nombres ainsi ordonnez ont telle propriete que qui multiplie lung diceulx en soy il en vient le nombre proporcional situe ou double le lieu du nombre multiplie. Sicomme qui multiplie le .2.ᵉ en soy. Il en vient le .4.ᵉ Et qui multiplie le .3.ᵉ en soy il en vient le .6.ᵉ et ainsi des aultres. Et qui multiplie lung diceulx par lung des aultres et qui adiouste les deux ordres esquels sont situez les deux nombres multipliez, il treuve le lieu ou doit estre situe le nombre venu de la multiplicacion cest a dire quil treuve le quantiesme nombre ceste multiplicacion doit produire. [4, p. 77]

Chuquet décrit la correspondance entre les nombres d'une suite proportionnelle, commençant par 1, et les nombres de la suite arithmétique de leur rang, compté ici à partir du premier nombre suivant 1 : le produit de deux nombres de la suite proportionnelle est le nombre de la suite dont le rang est la somme des rangs des deux facteurs du produit.

Il donne l'exemple de la suite proportionnelle de rapport : $\frac{5}{3}$, qu'il écrit : $1.\frac{2}{3}$., et dont il calcule les termes jusqu'au sixième :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1.\frac{2}{3} & 2.\frac{7}{9} & 4.\frac{17}{27} & 7.\frac{58}{81} & 12.\frac{209}{243} & 21.\frac{316}{729} \\ & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. \end{array}$$

et explique que si on multiplie le 2^e qui est $.2.\frac{7}{9}$. par le 3^e qui est $.4.\frac{17}{27}$. on trouve $.12.\frac{209}{243}$. qui est le 5^e car .2. et .3. font ensemble .5. [4, p. 78]

Nous vérifions que, après avoir explicité cette règle, Chuquet n'en donne aucune utilisation originale ni dans la suite du premier livre ni dans le second livre arithmétique. En revanche, c'est bien sur la multiplication des nombres proportionnels que Chuquet fonde la « règle des premiers » dont il écrit dès l'introduction de la troisième partie du *Triparty* :

> *Ceste rigle est la clef lentree et la porte des abismes qui sont en la science des nombres.* [4, p. 151]

L'aspect mystérieux de l'algèbre, en tant que Science de l'inconnue, et le caractère secret qu'aurait la règle de multiplication des nombres proportionnels seront également soulignés par Stifel.

Chuquet explique que tout nombre entier ou fractionnaire peut être considéré de multiples manières : comme nombre simple, comme nombre linéaire, comme nombre superficiel quarré, comme nombre cubique, … lesquels sont alors caractérisés par une « dénomination notée au-dessus d'eux », .0., .1., .2. ou .3. ..., cette dénomination pouvant être affectée d'un plus « p » ou d'un moins « m » placé après elle. Chuquet nomme « premiers » les nombres de dénomination 1, que les Anciens, précise-t-il, ont appelé « choses », et il nomme plus généralement « différences » les nombres de dénominations quelconques. Ce sont, comme pour les prédécesseurs algébristes de Chuquet, arabes en particulier, des objets mathématiques dont la nature reste ambiguë puisqu'ils sont proches à la fois de nos nombres inconnus élevés à des puissances quelconques et de nos monômes (ou inverses de monômes). Mais les « différences » de Chuquet sont numérotées par leur dénomination qui est « exposée » et les règles de calculs sur ces « différences », dont le rang est visible, sont déduites de la règle de multiplication des termes d'une suite géométrique. L'introduction de la dénomination nulle et des dénominations négatives permet à Chuquet de calculer sur ces « différences » sans aucune restriction.

Après avoir exposé les règles d'addition et de soustraction des différences, quand elles sont semblables, Chuquet énonce que le produit de deux différences, semblables ou non, s'obtient en multipliant leurs « nombres » (les coefficients des monômes) et en additionnant leurs dénominations (leurs exposants respectifs). À titre d'exemple :

> *Pareillement qui multiplie .2.^{1} par .4.^{2} Il en vient .8.^{3} Car .2. par .4. multipliez et .1. avec .2. adioustez font .8.^{3} […] En ceste consideracion est manifeste ung secret qui est es nombres proporcionalz.* [4, p. 155-156]

On reconnaît le calcul : $2x \times 4x^2 = (2 \times 4)\,x^{(1+2)}$

L'énoncé relatif au quotient de deux différences est déduit naturellement du précédent. Chuquet multiplie les exemples ; les calculs avec des dénominations affectées d'un signe « m » sont tout à fait maîtrisés :

> *Et qui partiroit .84.$^{2.m.}$ par .7.$^{3.m.}$ fault partir nombre par nombre et lon aura .12. Puis apres fault lever .3.m. de .2.m. reste .1.p. pour denominacion de .12. Ainsi vient ala part .12.^{1}* [4, p. 157]

ce qui peut s'écrire : $(84x^{-2}) \div (7x^{-3}) = (84 \div 7)x^{(-2)-(-3)} = 12x^1$

La suite du développement confirme le caractère résolument algébrique de la démarche. Chuquet montre comment, pour résoudre un problème, on « pose » l'inconnue, .1.^{1}, et on écrit une équation traduisant les contraintes du dit problème. Il indique comment réduire les équations et comment transformer les équations comportant des extractions de racines pour les ramener aux formes canoniques pour lesquelles il énonce les « quatre canons de la science des nombres ou de la règle des premiers ». Ce sont les règles pour la résolution des quatre équations qui, en notations actuelles, avec des coefficients tous positifs, s'écrivent :

$$ax^p = bx^{p+r}$$
$$ax^p + bx^{p+r} = cx^{p+2r}$$
$$ax^p = bx^{p+r} + cx^{p+2r}$$
$$ax^p + cx^{p+2r} = cx^{p+r},$$

la première se ramenant à une extraction de racine *r*ème, et les trois autres à des équations du second degré en x^r.

Les soixante dernières pages du *Triparty* sont alors consacrées à des résolutions algébriques de problèmes de recherches de nombres satisfaisant des conditions données.

Chuquet conclut en indiquant qu'il resterait à trouver

> *rigles et canons generaulx pour troys differances de nombre inegalement distans et encore pour quatre ou plus differances egalement ou inegalement distans lune de laultre.* [4, p. 229]

C'est dire qu'il resterait à trouver des règles pour la résolution des équations de degré supérieur ne se ramenant pas à des équations quadratiques. Il confie la tâche à ses successeurs.

Ainsi quand, dans cette troisième partie du *Triparty*, Chuquet réexplique la règle de multiplication des nombres proportionnels, c'est pour la mettre au service de l'algèbre, précisément de la résolution des équations algébriques. Il fait émerger une notation des puissances de l'inconnue qui favorise la classification des problèmes et l'élaboration de règles générales pour l'invention de leurs solutions.[2]

STIFEL ET LE MYSTÈRE DES MERVEILLES DES NOMBRES

Le mathématicien et théologien allemand Michael Stifel (1487-1567) est un ami de Luther. En s'adonnant à l'interprétation cabalistique des textes bibliques, il se passionne

---

[2] Précisons que, dès le début du 11ème siècle, le mathématicien arabe al-Karajī a présenté de façon systématique, dans son traité *al-Fakhri*, les puissances de l'inconnue et leurs inverses et qu'il a étudié les multiplications et les divisions de ces quantités entre elles. Il en a déduit les règles pour la résolution des équations de degré supérieur à 2 se ramenant à des équations quadratiques [10, p. 241]. Fibonacci, au début du 13ème siècle, a largement contribué à diffuser les mathématiques arabes en Europe.

pour les nombres et consacre finalement son activité aux mathématiques après les mésaventures que lui valent quelques prédictions malencontreuses. Son *Arithmetica Integra* [6] est une synthèse des connaissances de son époque, en arithmétique et en algèbre, augmentée de contributions personnelles importantes. Elle est également composée classiquement de trois parties, un premier livre d'arithmétique, un second livre qui traite des nombres irrationnels, et un troisième livre consacré à l'algèbre. C'est en tant qu'algébriste que Stifel est le plus connu et, tout au long de son livre I, les nombreuses reprises et synthèses de résultats arithmétiques connus auxquelles il se livre ont une destination algébrique explicitée. Ainsi, en ouverture du chapitre IIII du livre I sur les progressions géométriques, nous lisons :

> *Après les progressions Arithmétiques suivent les progressions Géométriques, selon l'ordre correct, si ce n'est que le traité des proportions aurait pu être intercalé, pour la raison que les progressions Géométriques ne sont rien d'autre que des proportionnalités, c'est-à-dire des suites de proportions égales : comme dans cette progression 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. la proportion double succède à la proportion double de façon continue de terme en terme. [...] Et les progressions Géométriques méritent bien une louange exceptionnelle pour cette raison que l'art Cossique ou art de l'Algèbre n'est rien d'autre que le calcul par les progressions Géométriques : lequel est si grand, qu'il contient les règles de calcul de toutes les Arithmétiques, et qu'il a une immense utilité en Géométrie. [...]*
> *Et vois ici, comme la progression naturelle des nombres est au service des progressions Géométriques.*

0.	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*
1.	*2.*	*4.*	*8.*	*16.*	*32.*	*64.*

> *Premièrement ce qui est l'unité dans les progressions Géométriques est le zéro dans les progressions Arithmétiques. Et que 2 soit placé au-dessus du troisième terme signifie que ce troisième terme s'obtient en posant la racine (le nombre qui suit immédiatement l'unité) deux fois et en faisant la multiplication. C'est pareillement que 3 est posé au-dessus du quatrième terme, & que 4 est posé au-dessus du cinquième & ainsi des autres.* [6, f. 30-31, notre traduction pour tous les extraits cités]

Et avant la fin du même chapitre :

> *Suit ce traité utile, selon lequel la progression Géométrique correspond à la progression Arithmétique. 1. L'addition dans les progressions Arithmétiques correspond à la multiplication dans les progressions Géométriques. 2. La soustraction dans les Arithmétiques correspond à la division dans les Géométriques. 3. La multiplication simple (soit nombre par nombre) qui se fait dans les Arithmétiques correspond à la multiplication par soi qui se fait dans les Géométriques. 4. La division dans les progressions Arithmétiques correspond à l'extraction de racine dans les progressions Géométriques.* [6, f. 35-36]

> *[...] De la considération d'observations de cette sorte, on a pu déduire le principe de calcul d'une généralité admirable qu'on appelle art Cossique ou Algèbre : & ici magnifiquement la progression naturelle des nombres est au service des progressions géométriques. En effet ainsi qu'à la ligne supérieure 2 et 3 font 5 :*

ainsi à la ligne inférieure 4 par 8 font 32, [...], soit le nombre qui se pose à la cinquième place après l'unité non comptée. [...] De même, ainsi qu'à la ligne supérieure, 1 étant soustrait de 6, il reste 5, ainsi à la ligne inférieure, le diviseur 2 divisant 64, il en résulte le nombre qui se pose sous le 5. [...] Donc le principe est désormais établi de cet algorithme particulièrement pertinent pour l'Algèbre. [6, f. 37]

C'est la pertinence déjà expliquée par Chuquet dans la partie algébrique du *Triparty*. Bien que les « cossistes » allemands, c'est-à-dire les algébristes pour qui l'inconnue est la « coss », n'introduisent pas d'écriture numérotée pour les puissances de l'inconnue mais désignent le monôme par une écriture symbolique qui repose sur la décomposition en facteurs premiers de son rang dans la suite des puissances, Stifel utilise lui aussi « l'art de calculer avec les progressions géométriques » pour justifier les règles de calcul sur les monômes et réduire les équations algébriques à leur forme canonique. L'originalité de Stifel, c'est la règle A.M.A.S.I.A.S., exposée au chapitre IIII du livre III, qui se veut un algorithme unique pour la résolution de toutes les équations quadratiques complètes et se fonde entre autres sur un positionnement ordonné des monômes. Il en résulte des coefficients négatifs avec lesquels Stifel s'efforce de calculer. À nouveau la relation fondamentale est mise au service de l'Algèbre, ici pour l'invention d'un algorithme de résolution opérant sur des coefficients de signe quelconque.

Un autre passage du chapitre suivant du même livre d'algèbre attire également l'attention des commentateurs. Le chapitre V est, en sa deuxième partie, consacré aux « signes d'addition et de soustraction et nombres absurdes » (le terme est couramment utilisé pour désigner les nombres négatifs). Après le recensement dans un tableau de toutes les situations d'addition, de soustractions, de multiplications et de divisions des sommes et des différences de nombres, que Stifel compare à des opérations sur des expressions comportant des inconnues, il revient sur un des exemples de soustraction, qui engage des nombres fictifs « en-dessous de rien », et explique ainsi la soustraction posée :

$$\begin{array}{r} 8-2 \\ \underline{10-5} \\ 3-2 \end{array}$$

Soustrayant d'abord 10 de 8, il ne trouve pas de nombre au-dessus de 0 qu'il puisse poser selon la loi de la soustraction. Il pose donc un nombre en-dessous de 0, soit en-dessous de rien, à savoir $0-2$. Il soustrait ensuite $0-5$ de $0-2$ et trouve $0+3$, c'est-à-dire un nombre « au-dessus de rien », ou nombre vrai.

Stifel entame alors un commentaire sur l'intérêt des nombres fictifs, nombres en-dessous de zéro ou bien fractions de l'unité.