T^le^/SUP

501 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

Konrad Renard

POUR RÉUSSIR SA RENTRÉE

ellipses

Chapitre 1

Manipulations algébriques

1.1 Automatismes

Exercice 1 **10 minutes**

Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité :

1. $A = \dfrac{14(6x-7)}{(x-2)(3x+1)} + \dfrac{3x+4}{(x-2)(2x-5)}$

2. $B = \dfrac{x-4}{x-5} + \dfrac{x-6}{x-4} + \dfrac{x-8}{x-3}$

3. $C = \dfrac{2x+1}{x^2+2x} \times \dfrac{5x^2+4x}{2x^2+7x+3}$

4. $D = 2\dfrac{5x-1}{x(2x-1)} - \dfrac{3x-7}{x(2x+1)} - 3\dfrac{10x-1}{4x^2-1}$

Exercice 2 **10 minutes**

Ecrire sous la forme $a^n b^p$, avec n et p entiers relatifs, les expressions suivantes :

1. $\left(a^2 b\right)^4$

2. $\left[\left(a^2 b^3\right)^2\right]^3$

3. $\left(\dfrac{3a^2}{b^3}\right) \times \left(\dfrac{b}{a^5}\right)$

4. $\left(-a^2 b^{-1}\right)^{-1} \times \left(a^{-2} b\right)^{-2}$

5. $\left(2a^2 b^3\right)^3$

6. $\left(a^2 b\right)^3 \times \left(3b^3\right)$

7. $\left(\dfrac{ab^2}{a^3}\right)^3 \times \left(\dfrac{b^2}{a^4}\right)^2$

8. $\left(5a^{-1} b^2\right)^2 \times \left(\dfrac{b^{-1}}{a^5}\right)^{-2}$

9. $\left(-4ab^3\right)^4$

10. $\left(5a^2 b\right)^3 \times \left(-ab^3\right)^3$

11. $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^3 \times \left(\dfrac{2a}{b}\right)^3 \times \left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)^2$

12. $\left(\dfrac{a^2 b}{a^5}\right)^2 \times \left(\dfrac{b^{-3}}{a^3 b}\right)^{-3}$

Exercice 3 **5 minutes**

Développer les expressions suivantes :

1. $A = (a+b)^3$

2. $B = (a-b)^3$

3. $C = (a+b)^4$

4. $D = (2a-b)^5$

5. $E = (a-b)^6$

6. $F = (a+b)^7$

Exercice 4 **5 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^2 - y^4$

2. $B = (2x-1)^2 + 4x - 2$

3. $C = x^2 - y^2 + 3x - 3y$

4. $D = x^4 - y^4 + x^3 - y^3$

5. $E = (a-b)^3 + 2ab\left(a^2 - b^2\right)$

6. $F = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} - 3x + 3y$

EXERCICE 5 **5 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^4 - 2x^2 + 1$

2. $B = x^4 + x^2 - 2$

3. $C = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$

4. $D = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

EXERCICE 6 **5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^8 \times e^{-2} \times e$

2. $B = 2\sqrt{e} \times e^{\frac{3x-1}{2}} \times e^{\frac{x}{2}+1}$

3. $C = e^{3x+2} \times \left(e^{x+2}\right)^2$

4. $D = (e^x)^{-2} \times e^{2-3x}$

EXERCICE 7 **5 minutes**

Exprimer avec un seul ln, les expressions suivantes :

1. $A = \ln 2 - 3\ln 3 + \ln 8$

2. $B = \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$

3. $C = 5\ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 2$

4. $D = 6\ln\sqrt{2} - \ln\left(\dfrac{2^5}{3}\right)$

EXERCICE 8 **5 minutes**

Simplifier, pour $x > 0$, l'expression $A = \sqrt{\dfrac{x^{n+2} + x^2}{x^{n+1} + x}}$.

EXERCICE 9 **5 minutes**

Démontrer que l'expression suivante ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}$ et donner sa valeur.

$$A = \frac{\left(8^{n+1} + 8^n\right)^2}{\left(4^n - 4^{n-1}\right)^3}$$

EXERCICE 10 **10 minutes**

1. Ecrire $X^4 + 1$ comme produit de polynômes de degré 2 à coefficients réels.

2. Faire de même avec $X^6 + 1$.

1.2 Equations

EXERCICE 11 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x+4} = \dfrac{2}{x-2}$

2. $\dfrac{x+1}{x-1} = 3$

3. $\dfrac{5x+3}{4} - \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{x}{2} + 3$

4. $\dfrac{4x+6}{3} - \dfrac{x+6}{2} = \dfrac{3x+1}{6}$

5. $\dfrac{(2x-3)(2x+3)}{8} - \dfrac{(x+4)^2}{6} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{3}$

6. $\dfrac{(x-2)^2}{3} + \dfrac{(x-5)(x+4)}{2} = \dfrac{(5x+4)(x-3)}{6} - \dfrac{20}{3}$

EXERCICE 12 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes avec m un paramètre réel :

1. $mx - 3m = 3x + 5m - 1$
2. $mx - 5 = m - 3x$
3. $m^2(x-1) + 3m = x + 2$
4. $m^2(x+1) + 3m = x + 4$
5. $(m+1)x - 2m = x + 2 - \dfrac{3mx + 3m - 1}{2}$
6. $\dfrac{x+2m}{5} + 3 = \dfrac{3x - m}{2} + \dfrac{m}{10} - \dfrac{m - 3x}{20}$

EXERCICE 13 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $(x+1)(2x+3) + (x+1)^2 = 0$
2. $x^2 - 9 = (3-x)(3x+2)$
3. $(2x+5)^2 = (3x+2)^2$
4. $(2x+1)(x+1) = 5(2x+1)$
5. $\left(4x^2 - 3x - 18\right)^2 - \left(4x^2 + 3x\right)^2 = 0$
6. $(2x+1)(3x+2) + (2x+1)(x-2) - \left(4x^2 - 1\right) = 0$

EXERCICE 14 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $-3x^2 + 9x - 6 = 0$
2. $x^2 - 7x + 10 = 0$
3. $2x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$
4. $x^2 + \left(\sqrt{2} + \sqrt{18}\right)x + 6 = 0$
5. $\dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{5} = 0$
6. $\dfrac{x^2}{2} - 7x + 1 = 0$

EXERCICE 15 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $-\dfrac{2x+1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$
2. $x^4 + 3x^2 = -2$
3. $\left(x^2 - 4x + 1\right)^2 - \left(6x^2 - 3x - 1\right)^2 = 0$
4. $\left(x^2 - 4x - 1\right)^2 - \left(6x^2 - 3x - 1\right)^2 = 0$
5. $\dfrac{10x^2 + 23x - 11}{16x^2 + 62x + 55} = -2$
6. $x^4 + 3x^2 = 2$
7. $(m-2)x^2 + 5x + 7 - m = 0$
8. $(m+1)x^2 + (2m+1)x + 2 - m = 0$

EXERCICE 16 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $x^2 + \left(2\sqrt{2} - 2\right)x + 3 = 2\sqrt{2}$
2. $2x^2 - \left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)x + \sqrt{3} = 0$
3. $x - 4 = \sqrt{2x - 5}$
4. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

EXERCICE 17 **10 minutes**

Soit m un réel, on considère l'équation : (E_m) $(m-2)x^2 + 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0$.

1. Discuter, suivant les valeurs de m, l'existence et le nombre de solutions de l'équation (E_m).
2. Pour quelles valeurs de m, l'équation admet-elle -1 comme solution ?

EXERCICE 18 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln^2 x - 2\ln x = 3$.

2. $2\ln\sqrt{x} + \ln(1-x) = 2\ln x$.

EXERCICE 19 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln\left(x^2-1\right) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$.

2. $\ln(2x-1) + \ln(2x+1) = \ln(x+2)$.

EXERCICE 20 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{2x} - 3e^x - 1 = 0$.

2. $e^x - 3 + e^{-x} = 1$.

EXERCICE 21 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $6e^{5x} - 7e^{4x} + e^{3x} = 0$.

2. $e^{4x} - 4e^{2x} - 77 = 0$.

EXERCICE 22 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$

2. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

EXERCICE 23 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $xy = 2$ et $x + y = 4$

2. $xy = 18$ et $x + y = 9$

3. $xy = 135$ et $x + y = 6$

4. $xy = 2$ et $x + y = 2$

EXERCICE 24 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $xy = 1$ et $x + y = \dfrac{8m+1}{m}$

2. $xy = 1$ et $x + y = \dfrac{4m}{1-2m}$

3. $xy = \dfrac{2}{m+1}$ et $x + y = \dfrac{2m+3}{m+1}$

4. $xy = m^2 - 4$ et $x + y = 2m$

EXERCICE 25 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x - 1 = \sqrt{x+2}$

2. $\sqrt{16x-7} = 8\sqrt{x-4}$

3. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-12} = \sqrt{x+12}$

4. $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = x$

EXERCICE 26 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x + 1 - \sqrt{4x-15} = 4$

2. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+3} = 2$

3. $\sqrt{2x+7} + 3 = 3(x+1)$

4. $\sqrt{x+18} + \sqrt{x-8} = \sqrt{x+2}$

EXERCICE 27 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $|x| + |x-1| = 1$

2. $x^2 - 3x + |x-1| = 0$

3. $|x| + |x-1| + |x+1| = 2$

4. $|-3x+4| + |4x-3| = 7$

EXERCICE 28 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\Big||x|-|x-1|\Big|=1$

2. $|2x+4|+|-2x+7|=8$

3. $|x|-|x-1|=1$

4. $\left|x^2-4\right|+|x-2|+|x+2|=0$

EXERCICE 29 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2-x+3|x-2|=0$

2. $\Big||x-1|-|3-x|\Big|=16$

3. $\left|1-x^2\right|-|x-3|=-2$

4. $\Big||x-a|-2\Big|=-\sqrt{x^2+3}$.

EXERCICE 30 **10 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^4-7x^3+8x^2-7x+3$.

1. Pour $x\neq 0$, exprimer $\dfrac{f(x)}{x^2}$ en fonction de $y=x+\dfrac{1}{x}$.

2. En déduire un procédé de résolution de l'équation $f(x)=0$.

EXERCICE 31 **25 minutes**

Le but de l'exercice est d'établir une formule permettant de résoudre les équations de degré 3.

1. En posant $x=t-\dfrac{b}{3a}$, montrer que toute équation de degré 3 , $ax^3+bx^2+cx+d=0$ peut se ramener à une équation de la forme $t^3+pt+q=0$

2. En développant $(u+v)^3$, montrer que $t=u+v$ est solution de l'équation $t^3+pt+q=0$ si
$$\begin{cases} u^3+v^3 &= -q \\ uv &= -\frac{p}{3} \end{cases}$$

3. En posant $X=u^3$ et $Y=v^3$, montrer que X vérifie l'équation (E) $U^2+qU-\dfrac{p^3}{27}=0$.

4. Résoudre l'équation (E).

5. En déduire les valeurs de u et v en fonction de p et q.

6. En déduire une solution exacte de l'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$, en fonction de a, b, c et d.

7. Déterminer une solution exacte de chaque équation :

a. $x^3+3x+2=0$

b. $x^3+3x^2-2x+4=0$.

EXERCICE 32 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-6z-40=0$ en appliquant la méthode de l'exercice précédent.
En déduire : $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

☞ On rappelle que $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

EXERCICE 33 **40 minutes**

On appelle polynôme réciproque de degré n, tout polynôme de degré n tel que, pour tout réel x non nul : $P\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^n}P(x)$.

1. Démontrer que si α est une racine non nulle de P, alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P.

2. On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2$.

- **a.** Démontrer que P est un polynôme réciproque de degré 4.
- **b.** Pour tout réel x non nul, on pose $X = x + \dfrac{1}{x}$. Calculer X^2.
- **c.** Démontrer que pour tout réel x non nul, résoudre l'équation $P(x) = 0$ revient à résoudre l'équation $Q(X) = 0$, où Q est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.
- **d.** Déterminer les racines de Q.
- **e.** En déduire les racines de P.

3. On considère le polynôme $P(x) = x^4 + \dfrac{27}{10}x^3 - 11x^2 + \dfrac{27}{10}x + 1$.

- **a.** Démontrer que P est un polynôme réciproque de degré 4.
- **b.** Déterminer une racine « évidente » de P, que l'on notera x_1.
- **c.** En déduire une autre racine de P, que l'on notera x_2.
- **d.** Déterminer un polynôme Q tel que pour tout réel x : $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\,Q(x)$.
- **e.** Déterminer les racines de Q.
- **f.** En déduire toutes les racines de P.

4. Soit le polynôme $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$.

- **a.** Démontrer que P est un polynôme réciproque.
- **b.** Démontrer que -1 est une racine de P.
- **c.** Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x, $P(x) = (x+1)Q(x)$. Que peut-on dire du polynôme Q ?
- **d.** Que peut-on en déduire pour la recherche des racines d'un polynôme réciproque de degré 5 ?
- **e.** Déterminer les racines de P lorsque $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$.

EXERCICE 34 **15 minutes**

Résolution d'une équation de degré 4 par la méthode de Ferrari.
Soit $P(z) = z^4 + pz^2 + qz + r$ avec p, q et r trois nombres complexes.

1. Soit λ un nombre complexe. Expliciter un polynôme complexe T_λ de degré au plus 2 tel que :
$\forall z \in \mathbb{Z},\ P(z) = \left(z^2 + \dfrac{\lambda}{2}\right)^2 - T_\lambda(z)$.

2. Montrer que T_λ est le carré d'un polynôme de degré au plus 1 si et seulement si λ vérifie une équation de degré 3 que l'on précisera.
En déduire une méthode de résolution d'une équation du quatrième degré.

EXERCICE 35 **15 minutes**

Soient a, b et c trois nombres complexes. On note P le polynôme unitaire défini par : $\forall x \in \mathbb{C}$, $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.
On écrit aussi $\forall x \in \mathbb{C}$, $P(x) = x^3 - sx^2 + ux - p$.

1. Exprimer s, u et p en fonction de a, b et c.

2. En sommant l'égalité $a^3 = sa^2 - ua + p$ et les relations analogues pour b et c, obtenir une identité relative à $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

1.3 Manipulation d'inégalités et inéquations

EXERCICE 36 **5 minutes**

Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geqslant \dfrac{1-x}{2}$.

EXERCICE 37 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $5 - 3x \geqslant x + 2$

2. $7x - \dfrac{x+1}{2} < \dfrac{1-3x}{5}$

3. $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-2}{6} > \dfrac{1}{2} + x$

4. $\left(\dfrac{x+5}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{x^2+25}{2}$.

EXERCICE 38 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $(x-1)(1-3x) > 0$

2. $(x-3)(5-2x) \leqslant 0$

3. $(4x-1)(x-2)(x+1) < 0$

4. $(3x-2)(x+1)(3-2x)(x-2) \geqslant 0$.

EXERCICE 39 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x}{x-2} \geqslant 3$

2. $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x+3}{x+1}$

EXERCICE 40 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{3x-2}{5-3x} > 1$

2. $\dfrac{(x+1)(x-2)}{2x-3} \geqslant 0$

EXERCICE 41 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x+1}{x} \geqslant \dfrac{x-1}{2x}$

2. $\dfrac{(1-x)(x+2)}{x} < 0$

EXERCICE 42 **15 minutes**

Résoudre et discuter, dans $\mathbb{R}$, les inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $\dfrac{(m-3)x}{2m} \geqslant \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{x-1}{m}$

2. $(m-2)(m-3) \leqslant \left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)$

EXERCICE 43 **15 minutes**

Résoudre et discuter, dans $\mathbb{R}$, les inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-2}{x-3} > \dfrac{x-m}{x-m-1} - \dfrac{x-m-1}{x-m-2}$

2. $\dfrac{x^2+mx+m^2}{x^2+2x+4} > \dfrac{x+m}{x+2}$.

EXERCICE 44 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $x^2 - 3x < 3$

2. $x^2 - x - 1 > 0$

3. $-5x^2 + 3x + 1 < 0$

4. $(3x-1)(2x+5) \geqslant 0$

EXERCICE 45 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $\left(x^2 - 5x + 4\right)\left(x^2 - 4x + 3\right) > 0.$

2. $\left(x^2 - 5x + 4\right)\left(x^2 - 9x + 14\right) \leqslant 0.$

3. $\dfrac{7x+3}{3x+2} \geqslant \dfrac{2-3x}{3x^2+5x+2}$

4. $\dfrac{\left(3x^2+2x-1\right)\left(x^2+x+2\right)}{\left(3-x^2\right)\left(x^2-x-6\right)} \geqslant 0$

EXERCICE 46 **15 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations d'inconnue x suivantes :

1. $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2-1} \leqslant 1$

2. $\dfrac{4-2x-3x^2-(x+4)(2x+2)}{x^2-5x+6} \leqslant 0$

3. $-2 \leqslant \dfrac{x^2-x-30}{8+2x-x^2} \leqslant 2$

4. $\dfrac{x^3-1}{x+1} \leqslant x^2 - x - 1$

EXERCICE 47 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x+1 < x-1$

2. $(x+1)^2 < (x-1)^2$

3. $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$

4. $\sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2}$.

EXERCICE 48 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x - 3 \geqslant \sqrt{x^2-2x}$

2. $x - 1 < \sqrt{x^2-2}$

3. $2x - \sqrt{x} - 1 < 0$

4. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \leqslant 1 - x$

EXERCICE 49 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $|(x-3)(x-5)| > x-3$

2. $|x| + |x-1| + |x-2| \leqslant 6$

3. $|x+2| \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$

4. $(|x|-3)(|x|-5) > 0$

5. $|1-x| \geqslant 2|x| - 1$

6. $(|x|-3)(|x|-5) \leqslant \dfrac{|x|-5}{|x|-3}$

EXERCICE 50 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $e^x + 1 \leqslant e^{-x}$

2. $e^{2x} - 4e^x - 5 < 0$

3. $\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| > 0$

4. $\ln(2x+1) + \ln(2x-1) < \ln(x+2)$.