Lotfi Lassoued

Licence
CAPES
Agrégation

Espaces vectoriels normés pour le calcul différentiel

Rappels de cours et exercices corrigés

ellipses

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des réels, soit le corps des complexes.

1.1 Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.1 Une norme sur E est une application

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant pour tout x, y dans E et λ dans $\mathbb{K}$ les propriétés suivantes :
(1) $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (séparation),
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogénéité),
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Remarques :

• La réciproque de l'axiome de séparation est vraie. En effet, par homogénéité, $\|0_E\| = \|0.0_E\| = 0.\|0_E\| = 0$.

• Une norme est toujours positive. En effet, en prenant $y = -x$ dans l'inégalité triangulaire, on obtient que $0 \leqslant 2||x||$.

• Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé (en abrégé : evn).

• Une application de $E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie seulement (2) et (3) est appelée semi-norme sur E.

• Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E, la restriction à F de la norme de E est une norme sur F, appelée norme induite.

Euclide, né vers 325 avant Jésus-Christ, est un mathématicien de la Grèce antique ayant probablement vécu en Afrique, auteur des Eléments, qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques modernes. Euclide meurt en 265 avant Jésus-Christ à Alexandrie.

Proposition 1.1 Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle\ |\ \rangle$. L'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

est une norme sur E appelée norme euclidienne associée au produit scalaire.

Exemples :

1) L'application $x \longmapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

2) L'application $z \longmapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

3) Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les trois normes suivantes : si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$, $\|x\|_2 = \Big(x_1^2 + \cdots + x_n^2\Big)^{1/2}$ et $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. On notera que $\|\ \|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire euclidien défini par :

$$\langle x|y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Sauf mention du contraire, l'espace $\mathbb{R}^n$ sera toujours muni de l'une de ces trois normes.

4) Soit $E = C([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à

valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans cet espace, $\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur E. La norme euclidienne associée, appelée aussi la norme de la convergence en moyenne quadratique, est définie par

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

On peut aussi définir sur $C([a,b],\mathbb{R})$, la norme de la convergence uniforme : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{a\leq t\leq b} |f(t)|$ et la norme de la convergence en moyenne :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

5) Soit $(E_1, \|\ \|_1), \ldots, (E_n, \|\ \|_n)$ des espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{K}$ et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'espace vectoriel produit. Un élément x de E s'écrit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où x_i appartient à E_i, pour tout i=1,$\cdots, n$. L'application définie pour x dans E par $\|x\|_\infty = \max(\|x_1\|_1, \ldots, \|x_n\|_n)$, est une norme sur E appelée norme produit.

Proposition 1.2 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout x et y dans E, on a

$$\Big|\, ||x|| - ||y|| \,\Big| \leq ||x - y||.$$

Autrement dit l'application norme

$$E \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \|x\|$$

est 1-lipschitzienne.

Démonstration : On a $||x|| = ||x - y + y|| \leq ||x - y|| + ||y||$, d'où

$$||x|| - ||y|| \leq ||x - y||.$$

Par symétrie $||y|| - ||x|| \leq ||y - x|| = ||x - y||$, par suite $\Big|\, ||x|| - ||y|| \,\Big| \leq ||x - y||$.
■

Remarque : Soit E un espace vectoriel normé et posons pour x, y dans E, $d(x,y) = ||x - y||$. Alors d est une distance sur E, appelée distance déduite de la norme. La topologie induite par cette distance et dite topologie de la norme. Ainsi un espace normé est un espace métrique.

1.2 Suites dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'élèments de E.
• On dit que la suite (x_n) converge dans E s'il existe ℓ **appartenant à** E tel que : $\|x_n - \ell\|$ tend vers $0,$ lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $\|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$.
• On dit que la suite (x_n) est de Cauchy dans E, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $m \geq n \geq N$, on a $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$.
• On dit que la suite (x_n) est bornée dans E, s'il existe un réel M strictement positif, tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout entier naturel n.
Noter que toute suite convergente est de Cauchy mais que la réciproque est fausse.
• Un espace métrique E dans lequel toute suite de Cauchy est convergente dans E est appelé espace complet.
On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance déduite de la norme.
Si le corps de base est $\mathbb{R}$, on parle d'espace de Banach réel ; si c'est $\mathbb{C}$, on parle d'espace de Banach complexe.

Stefan Banach, né en 1892 à Ostrowsko, est un mathématicien polonais. Il est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Plusieurs de ses théorèmes portent son nom, tels le théorème de Hahn-Banach, le théorème Banach-Steinhaus, le théorème Banach-Alaoglu, le théorème de Banach-Schauder (ou encore théorème de l'application ouverte). Banach meurt en 1945 à Lviv.

Soient X un ensemble non vide et E un espace vectoriel normé, on dit qu'une application f de X dans E est bornée s'il existe un réel M strictement positif tel que

$$\|f(x)\| \leq M, \text{ pour tout } x \text{ dans } X.$$

L'ensemble $B(X,E)$ de toutes les applications de $X \longrightarrow E$ qui sont bornées, est un espace vectoriel. L'application

$$B(X,E) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad f \longmapsto ||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

est une norme sur l'espace $B(X,E)$, appelée la norme de la convergence uniforme. De plus,

Proposition 1.3 Si E est un espace de Banach, alors $B(X,E)$ muni de la norme de la convergence uniforme est aussi un espace de Banach.

Démonstration :
Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(B(X,E), ||\cdot||_\infty)$. Fixons x dans X. Pour tout n et m dans $\mathbb{N}$, on a

$$||f_n(x) - f_m(x)|| \leqslant ||f_n - f_m||_\infty.$$

La suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans E qui complet, donc converge dans E vers une limite qu'on note $f(x)$. On définit ainsi une application

$$f : X \longrightarrow E,\ x \longmapsto f(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x).$$

L'application f est bornée sur X. En effet, la suite (f_n) est de Cauchy dans $(B(X,E), ||\cdot||_\infty)$, elle est donc bornée par une constante M, si bien que pour tout x dans X, on a : $||f_n(x)|| \leqslant ||f_n||_\infty \leqslant M$. Par passage à la limite, on obtient $||f(x)|| \leqslant M$, ce qui prouve que f est dans $B(X,E)$. Reste à montrer que (f_n) converge vers f dans $B(X,E)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0, tel que pour tout $m \geq n \geq n_0, ||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon$, si bien que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout $m \geq n \geq n_0, ||f_n(x) - f_m(x)|| \leq \varepsilon$, pour tout x dans X. Fixons n et faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient grâce à la continuité de la norme de E : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout $n \geq n_0, ||f_n(x) - f(x)|| \leq \varepsilon$, pour tout x dans X. Ainsi la suite (f_n) converge vers f dans $B(X,E)$. ■

Corollaire 1.1 L'espace $C([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach.

Démonstration : Sachant que tout sous-espace fermé d'un espace complet est complet, donc il suffit de montrer que $C([a,b],\mathbb{R})$ est un fermé de $B([a,b],\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit (f_n) une suite de $C([a,b],\mathbb{R})$ qui converge uniformément vers f, ce qui implique grâce au théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, que la fonction f est continue sur $[a,b]$, si bien que f appartient à $C([a,b],\mathbb{R})$. ∎

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E. Pour tout entier naturel n, posons

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n). La quantité S_n est appelée somme partielle de rang n.

• On dit que La série de terme général u_n (ou la série $\sum_{n\geq 0} u_n$) est convergente dans E si la suite (S_n) converge dans E. Dans ce cas, la limite $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ se nomme la somme de la série et on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

• On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est divergente dans E.

• La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite absolument (ou normalement) convergente si la série $\sum_{n\geq 0} ||u_n||$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1 Dans un espace de Banach, réel ou complexe, toute série $\sum_{n\geq 0} u_n$ absolument convergente est convergente.
De plus

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n||.$$

Démonstration : On pose pour tout entier naturel n,

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n.$$

Pour $m > n$, on a :

$$||S_m - S_n|| \leq ||u_{n+1}|| + ... + ||u_m|| \quad \text{(Inégalité triangulaire).}$$

Comme la série de terme général $||u_n||$ converge, il en résulte d'après le critère de Cauchy que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $m > n \geq N$, on a $||u_{n+1}|| + ... + ||u_m|| \leq \varepsilon$. Par conséquent la suite (S_n) est de Cauchy, donc converge dans E. De plus, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{n} ||u_k||,$$

d'où par passage à la limite, (l'application $x \longmapsto ||x||$ est continue dans E) on obtient

$$\left|\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n||.$$

Ce qui achève la preuve. ■

1.3 Applications linéaires continues

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels normés et u une application de E dans F. Rappelons qu'on dit que u est continue en un point x_0 de E si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $||x - x_0||_E \leq \alpha$, alors $||u(x) - u(x_0)||_F \leq \varepsilon$.

Lorsque u est linéaire, la continuité prend des formes équivalentes qui sont souvent plus faciles à vérifier.

Théorème 1.2 Pour une application linéaire $u : E \longrightarrow F$, les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) L'application u est continue en tout point de E.
(2) L'application u est continue à l'origine 0_E.
(3) Il existe $c > 0$ tel que : pour tout x dans E, $||u(x)||_F \leq c||x||_E$.
(4) L'application u est lipschitzienne.

Démonstration : Il est clair que (1) $\Rightarrow$ (2). Montrons que (2) $\Rightarrow$ (3) : Supposons que u est continue à l'origine, donc ayant choisi $\varepsilon = 1 > 0$, on peut lui associer $\alpha > 0$ tel que : si $||x||_E \leq \alpha$, alors $||u(x)||_F \leq 1$. Soit x dans $E, x \neq 0_E$. On a $||\alpha \dfrac{x}{||x||_E}|| = \alpha$, donc $||u(\alpha \dfrac{x}{||x||_E})||_F \leq 1$, si bien que pour tout x dans E,

$$||u(x)||_F \leq \frac{1}{\alpha}||x||_E.$$

Il suffit donc de prendre $c = \dfrac{1}{\alpha}$. Montrons enfin que (3) $\Rightarrow$ (4). Soient x, y deux vecteurs quelconques de E ; d'une part, puisque u est linéaire on a

$$u(x) - u(y) = u(x - y).$$

D'autre part, par hypohtèse il existe $c > 0$ tel que $||u(x - y)|| \leq c||x - y||$ et donc

$$||u(x) - u(y)|| \leq c||x - y||, \quad \text{pour tout } x, y \text{ dans } E.$$

Ceci implique en particulier que u est lipschitzienne dans E.
Enfin, il est clair qu'une application lipschitzienne est continue. ■

Notation On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. C'est évidemment un sous espace vectoriel de l'espace des applications linéaires de E dans F noté $L(E, F)$.
L'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ s'appelle le dual topologique E, et on le notera E'. C'est le sous espace du dual algébrique $E^* = L(E, I\!K)$ de E.

Remarque :

1) On peut encore montrer que les proprietés suivantes sont équivalentes

- u est continue sur E.
- u est uniformément continue sur E.
- l'image $u(X)$ de toute partie bornée X de E est une partie bornée de F.

2) Lorsqu'on cherche à démontrer qu'une application linéaire u est continue, on majore $||u(x)||_F$ en cherchant à faire apparaitre une constante $c > 0$ telle que $||u(x)||_F \leq c||x||_E$ pour tout x dans E. On ne revient pas en gènèral à la définition de la continuité.