PSI/PSI*

Colles de mathématiques

Rémi Coutens

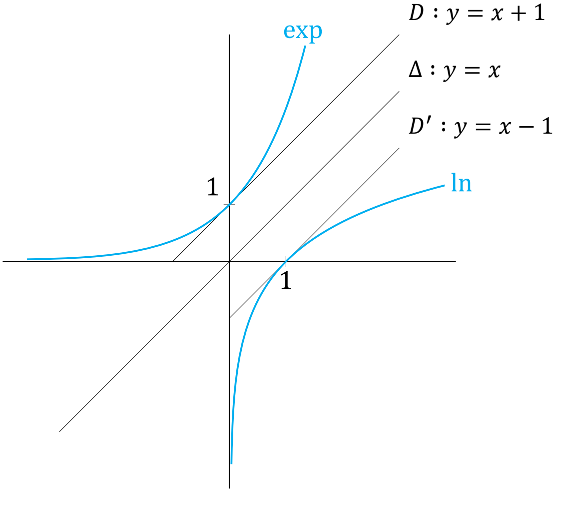
NOUVEAUX PROGRAMMES !

340 EXERCICES CORRIGÉS

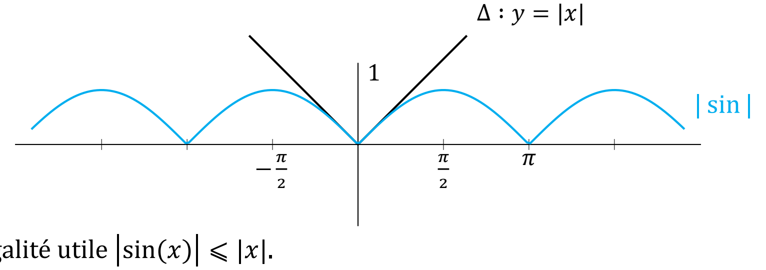
- Exercices de calcul
- Exercices de raisonnement
- Exercices avec questions ouvertes

ellipses

1 Quelques classiques de première année



Deux inégalités à connaître : $e^x \geqslant 1 + x$ et $\ln(x) \leqslant x - 1$ (ou encore $\ln(1 + t) \leqslant t$).



Autre inégalité utile $\left|\sin(x)\right| \leqslant |x|$.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Justifier l'équivalent $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2) Préciser le développement limité de tan au voisinage de 0 à l'ordre 5.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)$$

$$q_n = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1).$$

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n et q_n à l'aide de factorielles.

Exercice 3 *Somme et produit des racines d'un polynôme, transformation de* $e^{i\theta} \pm 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$.

1) Justifier que P_n admet n racines éventuellement confondues dans $\mathbb{C}$.
2) Préciser le produit et la somme de ces racines.
3) Résoudre $P_n(z) = 0$. Contrôler les résultats du 2).
4) Déduire de $P(1)$ la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4

1) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2) Montrer que ce résultat est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Montrer que si f est continue de $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, alors f admet un point fixe.

Exercice 6

Soit h une fonction dérivable sur un intervalle I s'annulant en p points distincts de I. Montrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois.

Exercice 7 *Moyenne géométrique et arithmétique*

Montrer que pour tous réels positifs x et y :

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Exercice 8 *Formule du binôme, unicité des coefficients d'un polynôme*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
Déterminer la valeur de S_n en utilisant le coefficient de X^n dans $(1+X)^n(1+X)^n$.

Exercice 9

Établir pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Que devient ce résultat pour $x < 0$?

Exercice 10

1) Soit $x \in [-1, 1]$.
   On pose $\theta = \pi - \arccos(-x)$. Calculer $\cos(\theta)$.
2) En déduire :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$$

3) Retrouver ce résultat à l'aide de la dérivation.

Exercice 11 ★★

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où a et $b \in \mathbb{R}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer le module de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n.
   Pour $n > -a$, déterminer un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n.
2) En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z.$$

D'après Centrale 2 PSI 2013

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f\left(x^2\right).$$

1) Vérifier que f est paire.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$ on a $f(x) = f\left(x^{2^{-n}}\right)$.
3) Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1) Si f est T-périodique, f' est-elle T-périodique ?
2) Que dire de f' quand f est paire ?

Exercice 14 *Polynôme divisible par son polynôme dérivé.*

Soit n un entier naturel non nul. Existe-t-il des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ de degré n qui soient divisibles par P' ? Si oui lesquels ?

Exercice 15

Pendant une balade d'une heure en forêt, un promeneur a parcouru exactement 6 kilomètres.
Existe-il un intervalle de temps de 30 minutes durant lequel il a parcouru 3 kilomètres ?

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$, donc $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{1} = x$.
2) On pourrait utiliser les développements de sin et cos et faire un quotient, mais les calculs sont pénibles. Pour retrouver rapidement le développement de tan, on préfère obtenir les développements successivement à l'aide de la dérivée :
   - Ordre 1
     D'après l'équivalent précédent (ou la formule de Taylor-Young à l'ordre 1), on a :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x).$$

- Ordre 3
  Or, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, donc $\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o\left(x^2\right)$,
  puis par « primitivation », $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$. Donc :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right).$$

- Ordre 5
  $\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o\left(x^4\right)$,
  puis par « primitivation » :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right).$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour p_n, on factorise par 2 dans chaque facteur :

$$p_n = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n) = 2^n\big(1 \cdot 2 \cdots (n-1)(n)\big) = 2^n n!.$$

Pour q_n, tous les facteurs sont impairs, on introduit les facteurs pairs de 2 à $2n$ et on divise par p_n :

$$q_n = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Remarque

On peut ne pas rédiger en extension :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!,$$

$$q_n = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n} k}{p_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Exercice 3

1) On a $\deg P_n = n$, donc P_n admet n racines (éventuellement confondues) dans $\mathbb{C}$.

2) On a, en notant $z_1, z_2, \dots, z_n$ les racines de P_n, $P_n = 1 \prod\limits_{k=1}^{n}(X - z_k)$, car le coefficient dominant de P_n est 1.
   En notant s et p la somme et le produit de ces racines, le cours assure que :

$$P_n = X^n - sX^{n-1} + \cdots + (-1)^n p.$$

   Donc, par unicité des coefficients d'un polynôme, $s = -1$ et $p = (-1)^n$.

CORRECTIONS

3) On sait que 1 n'est pas racine de P_n et que pour $z \neq 1$, $1 + z + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison z). Donc :

$$P_n(z) = 0 \iff (z^{n+1} = 1 \text{ et } z \neq 1).$$

Par conséquent, les racines de P_n sont les $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

En notant $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right)$. On a $\omega \neq 1$, $z_k = \omega^k$ et $\omega^{n+1} = 1$. D'où les calculs suivants :

$$s = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \omega^k = \omega \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{\omega - \omega^{n+1}}{1-\omega} = \frac{\omega - 1}{1-\omega} = -1,$$

$$p = \prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} \omega^k = \omega^{1+2+\cdots+n} = \omega^{\frac{n(n+1)}{2}} = \exp(in\pi) = (-1)^n.$$

4) Par la forme développée de P_n, on a $P_n(1) = n + 1$.

Par la forme factorisée de P_n, on a $P_n(1) = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right)\right)$.

Comme $1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\big(-2i\sin(\theta/2)\big)$, on en déduit en notant $\theta_k = \frac{2k\pi}{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \left(e^{i\theta_k/2}(-2i)\right) &= (-2i)^n \prod_{k=1}^{n} e^{i\theta_k/2} \\
& \qquad e^a e^b = e^{a+b} \\
&= (-2i)^n \, e^{\frac{i}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k\right)} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \\
&= (-2i)^n \, e^{i\,n\pi/2} \qquad e^{i\pi/2} = i \\
&= (-2i)^n (i^n) \qquad i^2 = -1 \\
&= 2^n.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \frac{n+1}{2^n}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$. Notons $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

On a $1 + \frac{x}{n} > 0$, donc $\ln\big(f_n(x)\big) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

Or, $u = \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc :

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n\frac{x}{n} = x.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\big(f_n(x)\big) = x$, puis par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$.

2) Soit $x < 0$. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right) = 1 > 0$. Donc il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $1+\frac{x}{n} > 0$.

Remarque

On a pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$1+\frac{x}{n} > 0 \iff n > -x \iff n \geqslant \lfloor -x \rfloor + 1.$$

On pouvait choisir $n_0 = \lfloor -x \rfloor + 1$.

La fin de la démonstration de la question précédente est valable à partir du rang n_0 et on obtient $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^x$.

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

Exercice 5

Pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0.$$

Notons $g : x \mapsto f(x) - x$.
La fonction g est continue sur $[0,1]$, $g(0) = f(0) \geqslant 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$.
Donc f admet un point fixe.

Exercice 6

On note, en les rangeant dans l'ordre strictement croissant, $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ des points de I où h s'annule.
Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Comme x_k et x_{k+1} appartiennent à l'intervalle I, on a $[x_k, x_{k+1}] \subset I$. Donc la fonction h est continue et dérivable sur $[x_k, x_{k+1}]$. De plus, $h(x_k) = h(x_{k+1})$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $h'(c_k) = 0$.
En choisissant un de ces points c_k dans chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, on obtient des points distincts, car :

$$x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3 < \cdots < x_{p-1} < c_{p-1} < x_p.$$

La dérivée h' s'annule au moins $p-1$ fois.

Exercice 7

Soient x et y des réels positifs.
On a $x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$, donc $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$. Par conséquent :

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Remarque

Le nombre $\sqrt{xy}$ est la longueur d'un côté du carré qui a la même aire xy qu'un rectangle de côtés de longueurs x et y. Ce nombre s'appelle la *moyenne géométrique* de x et y.

Le nombre $\frac{x+y}{2}$ est la moyenne arithmétique de x et y. Ce nombre est la longueur d'un côté du carré qui a le même périmètre qu'un rectangle de côtés de longueurs x et y.

Ce résultat montre que la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique.

Exercice 8

D'après la formule du binôme de Newton :

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \qquad \text{et} \qquad (1+X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k.$$

D'une part, le coefficient de X^n dans $(1+X)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$.

D'autre part, le coefficient de X^n dans le produit $(1+X)^n(1+X)^n$ est $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

De plus, on sait que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, donc par unicité des coefficients :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Remarque

Ce résultat est obtenu autrement à l'exercice 8 du chapitre 22.

Exercice 9

Posons $\psi : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par addition et composition, ψ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Pour $x \in]0, +\infty[$, $\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$.

La dérivée étant nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction ψ est constante sur $]0, +\infty[$.

Remarque

Il est important que $]0, +\infty[$ soit un intervalle pour ce point. D'ailleurs, la dérivée de ψ est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et la fin de l'exercice montre que ψ n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

Or, $\psi(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction arctan étant impaire, ψ l'est aussi, donc on obtient :

$$\forall x < 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$