PC/PC*

Colles de mathématiques

Jacques Delfaud

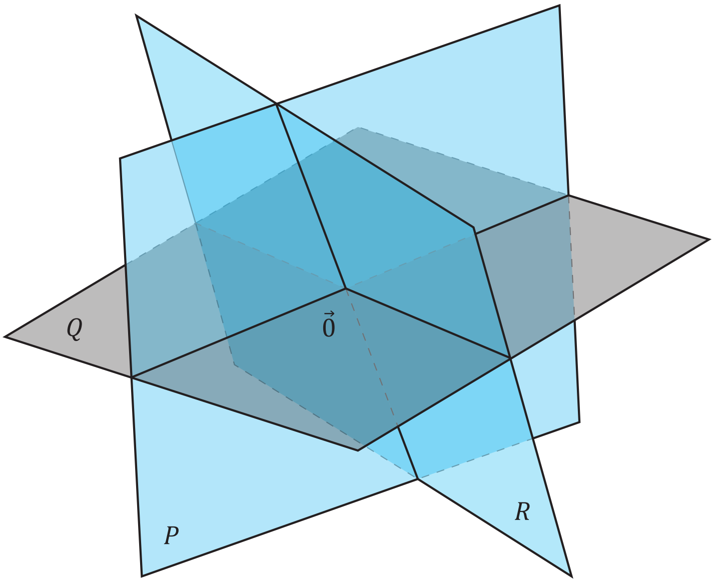
NOUVEAUX PROGRAMMES !

410 EXERCICES CORRIGÉS

- Exercices de calcul
- Exercices de raisonnement
- Exercices avec questions ouvertes

ellipses

Compléments d’algèbre linéaire 1



Dans l’espace vectoriel $\mathbb{R}$ sp 3, trois hyperplans P, Q et R en position dite « quelconque » ont pour intersection le sous-espace nul $\{\vec{0}\}$. Plus généralement, dans un espace de dimension n, n hyperplans en position quelconque ont pour intersection $\{\vec{0}\}$.

Énoncés des exercices

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 ⋆

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -64 & 47 & 22 & -94 \\ 66 & 39 & 22 & -88 \\ 3 & 3 & -5 & -6 \\ 69 & 47 & 22 & -99 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^4$ associé à A dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1) Déterminer une base de $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot \operatorname{Id})$ pour $\lambda \in \{-8, -5, 17\}$.

2) Montrer que $E = E_{-8} \bigoplus E_{-5} \bigoplus E_{17}$.

Exercice 2 ⋆

Soient l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et f l'endomorphisme de E représenté, sur la base $\mathcal{B}$, par la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On définit $F = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 - e_3, e_2 + e_3 + 2e_4)$ et $G = \operatorname{Vect}(e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_4)$.

1) Montrer que F et G sont stables par f.

2) En déduire que A est semblable à une matrice blocs $B = \begin{pmatrix} M & 0_2 \\ 0_2 & N \end{pmatrix}$ où 0_2 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(M, N) \in \left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)^2$.

Exercice 3 ⋆

On considère les cinq points suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) = (-2, 3),\ (x_2, y_2) = (0, -1),\ (x_3, y_3) = (1, 6),\ (x_4, y_4) = (5, 24) \text{ et } (x_5, y_5) = (6, 7).$$

On veut déterminer un polynôme P dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$, on ait $P(x_i) = y_i$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = \big(1, X + 2, (X + 2)X, (X + 2)X(X - 1), (X + 2)X(X - 1)(X - 5)\big)$ est une base de E, puis calculer les coordonnées de P dans cette base.

2) Montrer ensuite que la famille $\mathcal{B}' = \big(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\big)$ où $P_1 = X(X - 1)(X - 5)(X - 6)$, $P_2 = (X+2)(X-1)(X-5)(X-6)$, $P_3 = (X+2)X(X-5)(X-6)$, $P_4 = (X+2)X(X-1)(X-6)$ et $P_5 = (X + 2)X(X - 1)(X - 5)$ est une autre base de E, puis calculer les coordonnées de P dans cette base.

Exercice 4 ★★

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.
Soient F et G les sous-espaces vectoriels de E définis par :

$$F = \mathrm{Ker}(f) \ \text{ et } \ G = \mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 2 \cdot \mathrm{Id}_E).$$

1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2) Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme $g = f^2 - 2f + 2 \cdot \mathrm{Id}_E$ puis déterminer une base de G.
3) Montrer que F et G sont deux-sous espaces vectoriels stables par f.
4) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
5) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

Exercice 5 ★

1) Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation : $X + \mathrm{Tr}\,(X) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.
2) Soient n un entier naturel non nul et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation : $AX - XA = I_n$.

Exercice 6 ★

Calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$ suivant :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \quad -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 & & 0 & -x & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} - x \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 ⋆

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un nombre entier naturel non nul et l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puis on définit les trois endomorphisme u, v et w de E par :

$$\forall M \in E, \quad u(M) = AM, \quad v(M) = MB \text{ et } w(M) = AMB.$$

Déterminer la trace de chacun de ces trois endomorphismes.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 8 ⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1) Calculer M^p pour p entier naturel non nul quelconque.
2) Montrer que : $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(M) \oplus \operatorname{Ker}(M)$.
3) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle u est représenté par la matrice N définie par :

$$N = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 ⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que u^{-1} admet un polynôme annulateur (non nul) si, et seulement si, u admet un polynôme annulateur (non nul).

Exercice 10 ⋆

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel, E un espace vectoriel réel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1) On suppose dans cette partie que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
   a) Montrer que n est pair.
   b) Déterminer le rang de f en fonction de n.
   c) Montrer que f^2 est l'endomorphisme nul.
2) On suppose dans cette partie que f^2 est l'endomorphisme nul et que $n = 2\,\mathrm{rg}(f) = 2p$.
   a) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

c) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_p & 0_p \\ I_p & 0_p \end{pmatrix}$ où I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et 0_p la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont nulles.

Exercice 11 ⋆

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et (f, g) un couple d'endomorphismes de E.

1) Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.

2) Montrer que si $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$, alors :

   a) $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(g)$

   b) $\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$

   c) $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g)$ puis $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g \circ f)$

Exercice 12 ⋆

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n non nulle et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Le but de cet exercice est de montrer que la trace de l'endomorphisme f est nulle.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = \left(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$ soit une base de E.

2) Déterminer la matrice de f sur la base $\mathcal{B}$ puis conclure.

Exercice 13 ⋆⋆

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $A^k = I_n$.
On pose $B = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ puis on définit les endomorphismes u et v de $\mathbb{K}^n$ de matrices respectives A et B dans la base canonique.

1) Montrer que :

   a) $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}) = \operatorname{Im}(v)$.

   b) $\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(v)$.

   c) $\operatorname{Ker}(v) \oplus \operatorname{Im}(v) = \mathbb{K}^n$.

2) En déduire que $\operatorname{Tr}(B) = k \cdot \operatorname{rg}(B)$.

Exercice 14 ⋆⋆

Montrer que, pour tout entier non nul n, les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle sont semblables à des matrices de diagonale nulle.

Exercice 15 ⋆⋆⋆

Soient $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det C \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 16 ★★★

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et u un endomorphisme de E tel que : $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

1) Soient $e_3 \in E$ tel que $u^2(e_3) \neq 0$, $e_2 = u(e_3)$ et $e_1 = u^2(e_3)$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
2) Donner la matrice M de u sur la base $\mathcal{B}$ puis déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.
3) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 17 ★★★ *Déterminant de Vandermonde*

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de n scalaires.
On définit le déterminant de Vandermonde d'ordre n, noté $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, par :

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que l'on peut trouver un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que l'on ait :

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_n(x_n) \times V_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

et en déduire une expression de $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) On trouve :

$$E_{-8} = \mathrm{Vect}\Big((1,0,1,1)\Big), \quad E_{-5} = \mathrm{Vect}\Big((0,2,0,1), (-1,1,1,0)\Big) \text{ et } E_{17} = \mathrm{Vect}\Big((1,1,0,1)\Big).$$

2) Le calcul suivant :

$$\det(e_1', e_2', e'3, e'4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

   nous permet de conclure que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ est une famille libre à quatre éléments dans un espace E de dimension 4, donc que B' est une base de E, ce qui implique alors que $E = E_{-8} \oplus E_{-5} \oplus E_{17}$.

Exercice 2

On notera $a_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $a_2 = e_2 + e_3 + 2e_4$, $a_3 = e_1 + e_3$ et $a_4 = e_1 + e_2 + e_4$.

1) Les égalités $f(a_1) = a_2$ et $f(a_2) = -a_1$ donnent F stable par f.
De même, $f(a_3) = -2a_4$ et $f(a_4) = a_3$ donnent G stable par f.

2) La famille $\mathcal{B}' = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ est une base de E car $\det_{\mathcal{B}}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1 \neq 0$, ce qui implique que les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}(a_1, a_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(a_3, a_4)$ sont supplémentaires dans E.
Comme de plus, ils sont stables par f, on obtient :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = B = \begin{pmatrix} M & 0_2 \\ 0_2 & N \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet de conclure que A et B sont deux matrices semblables.

Exercice 3

1) La famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de E car elle est formée de cinq polynômes de degrés deux à deux distincts et c'est donc une base puisque $\dim(E) = 5$.
Notons alors (a, b, c, d, e) les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$P = a + b(X+2) + c(X+2)X + d(X+2)X(X-1) + e(X+2)X(X-1)(X-5).$$

On obtient alors successivement :

- $P(-2) = 3$ nous donne directement $a = 3$,
- $P(0) = -1$ nous donne $a + 2b = -1$, donc $b = -2$,
- $P(1) = 6$ nous donne $a + 3b + 3c = 6$, donc $c = 3$,
- $P(5) = 24$ nous donne $a + 7b + 35c + 140d = 24$, donc $d = -\frac{1}{2}$,
- $P(6) = 7$ nous donne $a + 8b + 48c + 240d + 240e = 7$, donc $e = -\frac{1}{60}$.

2) Supposons qu'il existe $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que $aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 + eP_5 = 0$.
Il suffit alors d'évaluer le polynôme $aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 + eP_5$ successivement en -2, 0, 1, 5 et 6 pour obtenir $a = b = c = d = e = 0$, ce qui implique que la famille $\mathcal{B}'$ est libre, donc une base de E puisque son cardinal est égal à la dimension de E.
De même, si on a $P = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 + eP_5$, alors en évaluant P en -2, 0, 1, 5 et 6 on obtient immédiatement :

$$a = \frac{P(-2)}{336} = \frac{1}{112}, \quad b = \frac{P(0)}{-60} = \frac{1}{60}, \quad c = \frac{P(1)}{60} = \frac{1}{10},$$
$$d = \frac{P(5)}{140} = -\frac{6}{35} \quad \text{et} \quad e = \frac{P(6)}{240} = \frac{7}{240}.$$

Remarque

On trouve de deux manières différentes le polynôme d'interpolation de Lagrange dont la forme générale correspond à la question 2 :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^{n} (X - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^{n} (x_i - x_j)} \right).$$

Si on développe le résultat de la première (ou deuxième) question on obtient l'expression du polynôme sur la base canonique (qui n'est vraiment pas adaptée dans ce cas car il faudrait résoudre un système de 5 équations à 5 inconnues), à savoir :

$$P(x) = -\frac{1}{60}x^4 - \frac{13}{30}x^3 + \frac{157}{60}x^2 + \frac{29}{6}x - 1.$$

Exercice 4

1) Comme $F = \mathrm{Ker}(f)$, alors on a :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_2 e_3 \in F \text{ donc } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

ce qui implique que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1')$ pour $e_1' = e_1 + e_3$.

2) Si on note B la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$, alors on trouve :

$$B = A^2 - 2A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice B est clairement de rang 1, donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) = 2$, et comme les colonnes de B sont toutes identiques, on obtient immédiatement que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}(e_2', e_3')$ pour $e_2' = e_1 - e_2$ et $e_3' = e_1 - e_3$.

3)
- Si $x \in F = \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0$ et comme f est linéaire, on a $f\big(f(x)\big) = f(0) = 0$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$, donc F est bien stable par f.
- Si $x \in G = \mathrm{Ker}(g)$, alors $f^2(x) - 2f(x) + 2x = 0$ ce qui implique, encore par linéarité de f :
$$0 = f^3(x) - 2f^2(x) + 2f(x) = f^2\big(f(x)\big) - 2f\big(f(x)\big) + 2f(x),$$
qui s'écrit aussi $g\big(f(x)\big) = 0$, donc $f(x) \in G$, donc G est bien stable par f.

4) Les trois vecteurs e_1', e_2' et e_3' forment une base de E car :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1', e_2', e_3') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

ce qui implique que $E = F \bigoplus G$.