L'ESSENTIEL POUR PROGRESSER

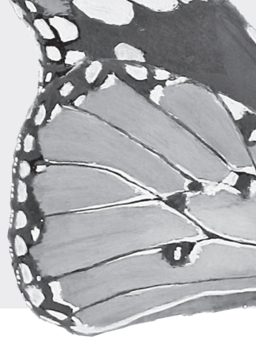
Les mathématiques au lycée

Maths expertes

option

Tle

ellipses



1 Nombres complexes

I Point de vue algébrique

Définitions et propriétés

- L'**ensemble des nombres complexes** se note $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.
- Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ se prolongent à $\mathbb{C}$.
- Le nombre complexe i vérifie $\boxed{i^2 = -1}$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la **forme algébrique** $\boxed{z = x + iy}$, avec x et y réels.
  x, **partie réelle** de z, se note $\mathrm{Re}(z)$.
  y, **partie imaginaire** de z, se note $\mathrm{Im}(z)$.
- $\boxed{\bar{z} = x - iy}$ est le **conjugué** de $z = x + iy$.
- Un complexe de partie réelle nulle s'appelle un **imaginaire pur**.

Exemple

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $z = (2 + 3i)(4 - i)$
2. $z = (2 - 3i)^2$
3. $z = \frac{2+3i}{1-i}$

Corrigé

1. $z = (2 + 3i)(4 - i) = 2 \times 4 - 2 \times i + 3i \times 4 - 3i \times i = 8 - 2i + 12i - 3 \times i^2$.
   Soit : $z = 8 + 10i - 3 \times (-1) = 8 + 10i + 3 = 11 + 10i$.

2. $z = (2 - 3i)^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2$.
   Soit : $z = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

3. *Pour éliminer le i au dénominateur, on utilise le conjugué de ce dénominateur.*
   $z = \frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+3i+3i^2}{1^2-i^2}$.
   Soit : $z = \frac{2+5i-3}{1-(-1)} = \frac{-1+5i}{2} = -0,5 + 2,5i$.

Ces calculs sont vérifiables à la calculatrice en mode complexe.
Casio : Touche OPTN, puis valider le mode complexe CPLX par F3.
TI : Sélectionner le mode a+ib.

Propriété d'identification

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

À retenir
La propriété d'identification est très pratique pour résoudre certaines équations.

Exemple

Déterminer le complexe a sachant que $(a-1)+i(a+1)=2+3i$.

Corrigé

Écrivons a sous forme algébrique; on pose $a=x+iy$, avec x et y réels.
On a alors : $(x+iy-1)+i(x+iy+1)=2+3i$.
Soit : $x+iy-1+ix+i^2y+i=2+3i$.
Soit : $x+iy-1+ix-y+i=2+3i$.
Soit : $(x-1-y)+i(y+x+1)=2+3i$.
Par unicité de la forme algébrique, on obtient :

$$\begin{cases} x-1-y=2 \\ y+x+1=3 \end{cases}$$

Soit : $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$

Soit : $\begin{cases} x=2\quad 5 \\ y=-0\quad 5 \end{cases}$

Et par là : $a=2,5-0,5i$.

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2i\bar{z}-6=0$.
Il est conseillé d'écrire z sous forme algébrique, puis de déterminer un système équivalent à l'équation initiale.

Corrigé

Posons $z=x+iy$ avec x et y **réels**.
On a alors :
$z^2+2i\bar{z}-6=(x+iy)^2+2i(x-iy)-6=x^2-y^2+2y-6+2ix(y+1)$.
Donc : $z^2+2i\bar{z}-6=0 \Leftrightarrow x^2-y^2+2y-6+2ix(y+1)=0+0i$.

Donc : $z^2 + 2i\overline{z} - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 6 = 0 \\ 2x(y+1) = 0 \end{cases}$

On a remplacé une équation dans $\mathbb{C}$ par un système dans $\mathbb{R}$.

On a donc :

$$z^2 + 2i\overline{z} - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 6 = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 6 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

Soit : $z^2 + 2i\overline{z} - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

Résolvons tout d'abord le premier système.

Le trinôme $y^2 - 2y + 6$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -20$. Comme $\Delta < 0$, ce trinôme n'a pas de racines **réelles**, et par là, le premier système n'a pas de solution.

Résolvons ensuite le second système.

Le trinôme $x^2 - 9$ a pour racines -3 et 3.

Par ailleurs, on constate que $y = -1$.

*Conclusion :*on obtient finalement l'équivalence :

$$z^2 + 2i\overline{z} - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

On rappelle alors que l'on a posé $z = x + iy$ avec x et y réels.

L'équation initiale a donc 2 solutions **complexes** : $-3 - i$ et $3 - i$.

Propriétés

Si z est un nombre complexe, alors :

$\boxed{\overline{\overline{z}} = z}$ $\boxed{z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)}$ $\boxed{z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)}$.

$\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}}$ $\boxed{z \text{ est un imaginaire pur } \Leftrightarrow z = -\overline{z}}$.

Définition

Soient z et z' deux nombres complexes avec $z \neq 0$.

L'**inverse** de z est le nombre complexe Z tel que $z \times Z = 1$; on le note $\frac{1}{z}$.

Le quotient de z' par z se note $\frac{z'}{z}$ et vérifie $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$.

Exemple

Déterminons (sans calculatrice) la forme algébrique de l'inverse de $z = 3 + 2i$.

Nous allons utiliser le conjugué $\overline{z} = 3 - 2i$.

On écrit : $\frac{1}{z} = \frac{1}{3+2i} = \frac{1 \times (3-2i)}{(3+2i) \times (3-2i)} = \frac{3-2i}{3^2 - 4i^2} = \frac{3-2i}{9+4}$.
Soit : $\frac{1}{z} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13} i$.
C'est la forme algébrique de l'inverse de z.

Opérations

Si z et z' sont 2 nombres complexes et si n est un entier naturel non nul, alors :

$\boxed{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$ $\boxed{\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}}$ $\boxed{\overline{z^n} = \overline{z}^n}$.

$\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}}$ (pour z non nul) $\boxed{\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}}$ (pour z' non nul)

Exemple

Déterminer la forme algébrique de $c = \overline{iz} + \frac{z + 2\operatorname{Re} z - \overline{z}}{iz}$ pour $z = 2 + 3i$.

Corrigé

$c = \overline{iz} + \frac{2\operatorname{Re} z + (z - \overline{z})}{iz} = \overline{i}\,\overline{z} + \frac{2(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)}{iz} = -i\overline{z} + \frac{2z}{iz} = -i\overline{z} + \frac{2}{i}$.
Soit : $c = -i(2-3i) + \frac{2i}{i^2} = -2i + 3i^2 - 2i = -2i - 3 - 2i = -3 - 4i$.

Formule du binôme dans $\mathbb{C}$

Soient z et z' deux nombres complexes, et n un entier naturel non nul.

$$\boxed{(z + z')^n = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} \times z' + \binom{n}{2} z^{n-2} \times z'^2 + \ldots + z'^n}.$$

On écrit aussi : $(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} \times z'^k$.

Exemple

Déterminons (sans calculatrice) la forme algébrique de $z = (3 + 2i)^4$.
On écrit :

$$(3 + 2i)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 3^{4-k} \times (2i)^k$$

Soit : $(3 + 2i)^4 = 3^4 + \binom{4}{1} 3^3 \times 2i + \binom{4}{2} 3^2 \times (2i)^2 + \binom{4}{3} 3 \times (2i)^3 + (2i)^4$.

Soit : $(3+2i)^4 = 81 + 4 \times 27 \times 2i + 6 \times 9 \times (-4) + 4 \times 3 \times (-8i) + 16$.
Soit : $(3+2i)^4 = 81 + 216i - 216 - 96i + 16$.
Soit : $(3+2i)^4 = -119 + 120i$.
C'est la forme algébrique demandée.

II Point de vue géométrique

Définition

Le **plan complexe** est le plan muni d'un répère orthonormal direct (O, I, J).
À tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$.

M est le **point image** de z.
$\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.
z est l'**affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

L'axe des abscisses s'appelle aussi l'axe des réels.
L'axe des ordonnées s'appelle aussi l'axe des imaginaires purs.

Propriété

Deux vecteurs sont égaux (ou deux points sont confondus) si et seulement si leurs affixes sont égales.

Propriété

Si k est un réel, et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives z et z',
alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$,
et $k\vec{u}$ a pour affixe kz.

Propriété

Si A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B, alors :
– le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $\boxed{z_B - z_A}$,
– le **milieu** du segment $[AB]$ a pour affixe $\boxed{\dfrac{z_A + z_B}{2}}$.

Exemple

Dans le plan complexe, A, B et D sont 3 points d'affixes respectives $z_A = -2 - 0,5i$,

$z_B = 2 - i$ et $z_D = -1 + 1,5i$.

Déterminer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.

Déterminer l'affixe z_E du centre E de ABCD.

Soit F point d'affixe $z_F = \frac{2}{3}i$. Montrer que B, D et F sont alignés.

Faire une figure et vérifier ces résultats.

Corrigé

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$.

Donc : ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow 2 - i - (-2 - 0,5i) = z_C - (-1 + 1,5i)$.

Donc : ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow 2 - i + 2 + 0,5i - 1 + 1,5i = z_C$.

Donc : ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow 3 + i = z_C$.

Par conséquent, C a pour affixe $\boxed{3 + i}$.

Le centre E du parallélogramme ABCD est le milieu de ses diagonales, par exemple de $[BD]$.

Donc $z_E = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{2-i+(-1+1,5i)}{2} = \frac{1+0,5i}{2} = \boxed{0,5 + 0,25i}$.

$\overrightarrow{BD}$ a pour affixe :

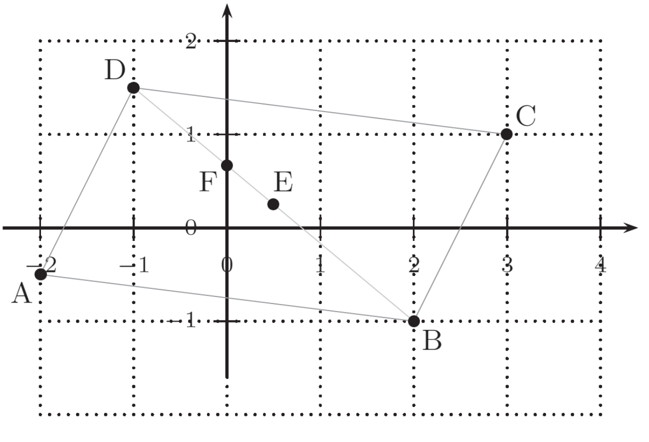
$z_{\overrightarrow{BD}} = z_D - z_B = -1 + 1,5i - (2 - i) = -1 + 1,5i - 2 + i = -3 + 2,5i$.

$\overrightarrow{BF}$ a pour affixe : $z_{\overrightarrow{BF}} = z_F - z_B = \frac{2}{3}i - (2 - i) = \frac{2}{3}i - 2 + i = -2 + \frac{5}{3}i$.

On constate que : $z_{\overrightarrow{BD}} = \frac{3}{2} z_{\overrightarrow{BF}}$, et donc que : $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$.

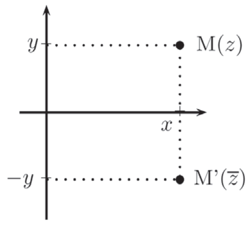
Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BF}$ étant colinéaires, **les points B, D et F sont alignés**.

Tout se vérifie sur la figure ci-dessous.



Propriété

Dans le plan complexe, 2 points d'**affixes conjuguées** sont **symétriques** par rapport à l'axe des abscisses.



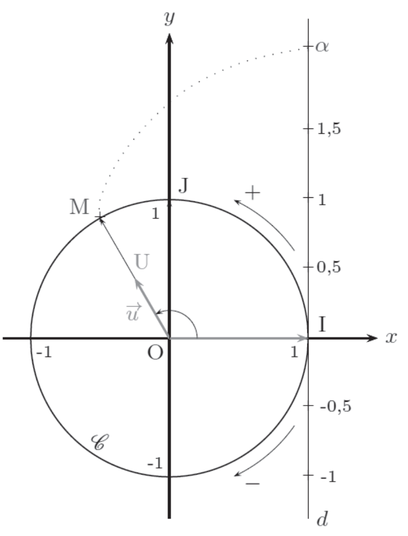
$z = x + iy$

$\overline{z} = x - iy$

Définition et propriété

Le plan est rapporté au repère (O,I,J).

Lorsque l'on gradue la tangente d en I au cercle trigonométrique C avec la même unité que le plan *(selon le dessin qui suit)*, et que l'on enroule la droite des réels obtenue sur C, chaque réel α de d est associé à un unique point M de C.



Soit $\vec{u}$ un vecteur tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$.

Soit M le point d'intersection du cercle trigonométrique C et de la droite (OU).

Si α est un réel de d associé au point point M de C,

alors α est une mesure *en radians* de l'**angle orienté** $\left(\overrightarrow{OI}; \vec{u}\right)$.

Et l'ensemble des mesures possibles est alors $\{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

On notera : $\boxed{\left(\overrightarrow{OI}; \vec{u}\right) = \alpha\,[2\pi]}$.

Propriété

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan tels que :

$\left(\overrightarrow{OI};\vec{u}\right) = \alpha\,[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OI};\vec{v}\right) = \beta\,[2\pi]$,

alors $\boxed{\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \beta - \alpha\,[2\pi]}$.

Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$.

Le **module** de z est le nombre réel positif, noté $|z|$, défini par $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Si, dans le plan complexe muni du repère (O,I,J), z a pour point image M,

alors $\boxed{OM = |z|}$;

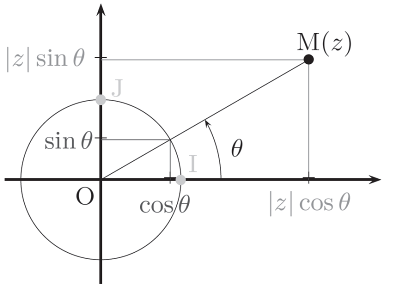
et si z est non nul,

alors son **argument**, noté $\arg z$, est n'importe quelle mesure (en radians) de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$;

et si l'on pose $\arg z = \theta\,[2\pi]$,

alors on obtient une **forme trigonométrique** de z :

$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$.



Propriété

Si z est un nombre complexe, alors :

$\boxed{z\bar{z} = |z|^2}$.

Si z et z' sont 2 nombres complexes, alors, ils vérifient **l'inégalité triangulaire** :

$\boxed{|z + z'| \leq |z| + |z'|}$.