L'ESSENTIEL POUR PROGRESSER

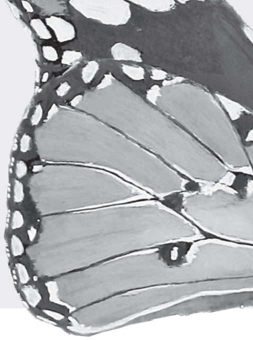
Les mathématiques au lycée

Maths complémentaires

option

Tle

ellipses



1

Suites numériques, modèles discrets

Un conseil : revoir le cours sur les suites de la classe de première !

Quelques rappels de première

Une suite (u_n) est **arithmétique** de **raison** a si et seulement si pour tout naturel n, $\boxed{u_{n+1} = u_n + a}$
(ici, la suite est donnée par une formule de récurrence).

(u_n) est **arithmétique** de **raison** a si et seulement si pour tout naturel n, $\boxed{u_n = u_0 + na}$
(ici, la suite est donnée par une formule explicite).

Pour tout entier naturel n, on a : $\boxed{1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Une suite (u_n) est **géométrique** de **raison** q si et seulement si pour tout naturel n, $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$
(ici, la suite est donnée par une formule de récurrence).

(u_n) est **géométrique** de **raison** q si et seulement si pour tout naturel n, $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$
(ici, la suite est donnée par une formule explicite).

Pour tout réel q (avec $q \neq 1$),on a : $\boxed{1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

Savoir faire

Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q, on essaie en général de prouver la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n \times q$.
Mais, si cela semble difficile, on essaie alors de prouver la relation explicite $u_n = u_0 \times q^n$.
Quelle que soit la méthode, les relations doivent être vérifiées pour tout naturel n.
Il ne faut pas se contenter de faire quelques vérifications avec des valeurs de n particulières !

> ***À retenir***
> Une augmentation régulière de a est associée à une suite arithmétique de raison a.
> Une augmentation régulière de $t\,\%$ est associée à une suite géométrique de raison $1+t\,\%$.
> Une baisse régulière de $t\,\%$ est associée à une suite géométrique de raison $1-t\,\%$.

I Limites de référence

Limite infinie

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand tous les termes u_n deviennent aussi grands que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand tous les termes u_n deviennent aussi « négatifs » que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Limites de référence

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Limite finie

La suite (u_n) a pour limite l quand tous les termes u_n deviennent aussi proches de l que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand.

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
On dit que la suite **converge** vers l.

Propriétés

La limite d'une suite est **unique**.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe, alors on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}}$

Suite stationnaire

Soit l un nombre réel; si $u_n = l$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Limites de référence

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Limite de (q^n)

Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (q^n) = +\infty$.

Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (q^n) = 1$.

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (q^n) = 0$.

Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Définition

La suite (u_n) **diverge** lorsqu'elle a une limite infinie ou lorsqu'elle n'a pas de limite.

II Opérations et limites

Opérations

La détermination de la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de 2 suites est intuitive, et vérifie les tableaux ci-dessous.

Si, dans un exercice, vous êtes confronté à une **forme indéterminée** (notée FI dans le tableau), alors vous serez guidés pour pouvoir déterminer la limite.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l>0	l>0	l<0	l<0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n < 0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Astuce
Dans une expression, toute constante peut être considérée comme une suite stationnaire, dont la limite est elle-même.

Savoir faire
Être capable de déterminer une limite de suite géométrique, ou une limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1.

Savoir faire
Être capable de conjecturer graphiquement une limite de suite définie par une relation de récurrence de type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour une fonction f « sympathique ».

III Comparaisons et limites

Théorème de comparaison

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si, à partir d'un certain rang, $v_n \geq u_n$,
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Propriété

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et si la suite (u_n) est croissante,
alors, pour tout entier naturel n, $u_n \leq l$.

Théorème des gendarmes

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$

et si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$,

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

IV Suites arithmético-géométriques

Définition

Soit a et b sont deux réels fixés.

Une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** de paramètres a et b si et seulement si elle satisfait à une relation de récurrence du type $u_{n+1} = a \times u_n + b$.

Si $a = 1$, alors une telle suite est arithmétique de raison b.

Si $b = 0$, alors une telle suite est géométrique de raison a.

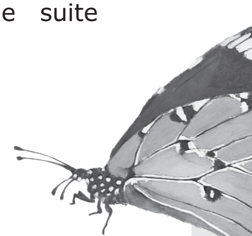
Propriété

La recherche d'une formule explicite pour une suite arithmético-géométrique (u_n) de paramètres a et b se fait en 3 étapes.

- On recherche le nombre l tel que $l = al + b$.
- On démontre que la suite (v_n) définie pour tout naturel n par l'égalité $v_n = u_n - l$ est géométrique de raison a.
- On détermine alors une formule explicite pour (v_n), puis pour (u_n).

Savoir faire

Être capable de déterminer une formule explicite pour une suite arithmético-géométrique.



Exercices corrigés

Exercice 1

Un exercice répétitif pour apprendre les opérations sur les limites de suites.

1. Soit (f_n) la suite définie par $f_n = \frac{5}{n^2}$ pour tout naturel n.

   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -4n^2 - \sqrt{n} + 11$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{9-\frac{2}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}-1}$ pour tout naturel n supérieur ou égal à 2.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
4. Soit (r_n) la suite définie par $r_n = \frac{1-0{,}98^n}{1-n^2}$ pour tout naturel n supérieur ou égal à 2.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.
5. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = -n^3 + 3n^2 - 2n$ pour tout naturel n.
   Vérifier que l'expression proposée conduit à une forme indéterminée si l'on cherche $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.
   On constate alors que : $w_n = n^3\left(-1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$.
   Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.
6. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = \frac{n+9}{-n+7}$ pour tout naturel n supérieur ou égal à 8.
   Vérifier que l'expression proposée conduit à une forme indéterminée si l'on cherche $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$.
   Vérifier alors que : $t_n = \frac{1+\frac{9}{n}}{-1+\frac{7}{n}}$.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$.
7. Soit (p_n) la suite définie par $p_n = \frac{8n^2+1}{n+2}$ pour tout naturel n.
   Vérifier que l'expression proposée conduit à une forme indéterminée si l'on cherche $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$.
   Vérifier alors que : $p_n = n\frac{8+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}$.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Corrigé

1. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 5 = 5$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.
   Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = 0$ *(limite d'un quotient)*.

2. $u_n = -4n^2 - \sqrt{n} + 11$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} -4 = -4$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.

Or $-4 < 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -4n^2 = -\infty$ *(limite d'un produit)*.

Par ailleurs $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\sqrt{n} = -\infty$.

Enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} 11 = 11$.

On obtient donc finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ *(limite d'une somme)*.

3. $v_n = \frac{9-\frac{2}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}-1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Or $-\frac{2}{n} = (-2) \times \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{2}{n} = (-2) \times 0 = 0$.

Par ailleurs $\lim\limits_{n \to +\infty} 9 = 9$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 9 - \frac{2}{n} = 9 - 0 = 9$ *(limite d'une somme)*.

De même, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 = 0 - 1 = -1$ *(limite d'une somme)*.

On obtient donc finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{9}{-1} = -9$ *(limite d'un quotient)*.

4. $r_n = \frac{1-0,98^n}{1-n^2}$.

$-1 < 0,98 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0,98^n\right) = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - 0,98^n\right) = 1 - 0 = 1$.

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$.

Et par là : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - n^2 = -\infty$ *(limite d'une somme)*.

On obtient donc finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$ *(limite d'un quotient)*.

5. $w_n = -n^3 + 3n^2 - 2n$.

On obtient facilement $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^3 = -\infty$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$*, ce qui conduit à une forme indéterminée.*

On factorise alors le terme « dominant » de la somme w_n.

$w_n = n^3\left(-1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} = -1 + 0 - 0 = -1$.

On obtient donc finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$ *(limite d'un produit)*.

6. $t_n = \frac{n+9}{-n+7}$.

On obtient facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} n+9=+\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+7=-\infty$*, ce qui conduit à une forme indéterminée.*
On factorise alors les termes « dominants » du quotient t_n *et on simplifie.*

$$t_n = \frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(-1+\frac{7}{n}\right)} = \frac{1+\frac{9}{n}}{-1+\frac{7}{n}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{9}{n}=1+0=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\frac{7}{n}=-1+0=-1$.

Donc on obtient finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=\frac{1}{-1}=-1$ *(limite d'un produit).*

7. $p_n=\frac{8n^2-n+1}{n+2}$.
On obtient facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} 8n^2+1=+\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} n+2=+\infty$*, ce qui conduit à une forme indéterminée.*
On factorise alors les termes « dominants » du quotient p_n *et on simplifie.*

$$p_n=\frac{8n^2+1}{n+2}=\frac{n^2\left(8+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=n\,\frac{8+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{8+0}{1+0}=8$.

Donc finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=+\infty$ *(limite d'un produit).*

Exercice 2

Un exercice utilisant les théorèmes de comparaison.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n=n^3+\sqrt{n^2-n+3}+11$ pour tout naturel n.
On sait que, pour tout naturel n, $\sqrt{n^2-n+3}\geq 0$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ par **comparaison**.

2. Soit (w_n) la suite définie par $w_n=\frac{(-1)^n}{n}$ pour tout naturel n non nul.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ en utilisant le **théorème des gendarmes**.

3. Montrer que, pour tout naturel n, $n^2-n+8>0$.
Soit (v_n) la suite définie par $v_n=\frac{2n^2+\cos n}{n^2-n+8}$ pour tout naturel n.
On sait que, pour tout naturel n, $-1\leq \cos n\leq 1$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ en utilisant le **théorème des gendarmes**.