EN CARTES MENTALES

Tle

OPTION

MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES

EN CARTES MENTALES

- L'essentiel du cours
- 15 cartes mentales
- 165 exercices corrigés

ellipses

CHAPITRE 1

Fonction exponentielle

L'essentiel du cours

1 Définition

THÉORÈME ET DÉFINITION 1.1.

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction **exponentielle** et est notée **exp.**
On a donc :

$$\exp' = \exp$$

et :

$$\exp(0) = 1$$

À savoir

- $\exp$ est une nouvelle fonction définie sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée.
- $\exp$ est une fonction qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
- Il n'existe qu'une seule fonction qui vérifie ces relations.

2 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ 1.2.

Pour tous x et y réels et pour tout n entier relatif on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \ ; \ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(nx) = \left(\exp(x)\right)^n \ ; \ \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

À savoir

- La fonction exponentielle transforme les sommes en produits et les différences en quotients.
- La dernière propriété permet d'écrire, avec $x = 1$, $\exp(n) = \left(\exp(1)\right)^n$. Cela permet d'introduire la définition suivante :

DÉFINITION 1.3.

Par convention, on note :

$$e = \exp(1) \approx 2{,}71828$$

et pour tout réel x :

$$\exp(x) = e^x$$

On peut ainsi réécrire la propriété 1.2 avec cette nouvelle notation :

PROPRIÉTÉ 1.4.

Pour tous x et y réels et pour tout n entier relatif, on a :

$e^{x+y} = e^x \times e^y$; $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

$e^{nx} = \left(e^x\right)^n$; $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

À savoir

- Les règles de calculs fonctionnent comme avec les puissances.

3 Étude de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ 1.5.

Signe : Pour tout réel x, $e^x > 0^x$.

Variations : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉ 1.6.

Pour tout a et b réels :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$
$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

À savoir

- Tracer le tableau de variations et l’allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal.
- Résoudre des équations et des inéquations.

▶ CARTE MENTALE 1. Fonction exponentielle

Fonction exponentielle

$f : x \mapsto e^x$

Domaine de définition

$D_f = \mathbb{R}$

Définition

Exponentielle est l'unique fonction f telle que sur $\mathbb{R}$:

$f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$

La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même.

Notations

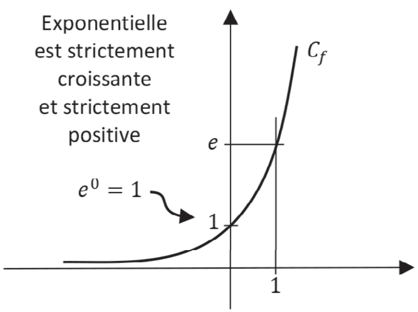
$\exp(1) = e \approx 2{,}72$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on note :

$\exp(x) = e^x$

Courbe

Exponentielle est strictement croissante et strictement positive



Propriétés

Pour tout x de $\mathbb{R}$

$e^x > 0$

$e^{x+y} = e^x \times e^y$

Exponentielle transforme les sommes en produits ...

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

... et les différences en quotient

$n \in \mathbb{Z}$

$(e^{nx}) = (e^x)^n$

$e^x = e^y \iff x = y$

$e^x < e^y \iff x < y$

L'ordre est conservé

Utile pour résoudre des équations et des inéquations

Les exercices pour préparer son contrôle

Exercice 1.1.

Simplifier les expressions suivantes, pour x réel :

$$A = e \times e^{x+5} \ ; \qquad B = \frac{e^{7x-1}}{e} \ ; \qquad C = \frac{e^{-x} \times e^{x}}{\left(e^{x}\right)^{3}} \ ; \qquad D = \frac{e^{-3+x}}{e^{2x+1}} \ ; \qquad E = \frac{7e^{x^2-2x+1}}{e^{x^2-1}}$$

☛ Corrigé page 165.

Exercice 1.2.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{2x+1} = e^{x-5}$
2. $e^{3x-1} = 1$
3. $e^{-\frac{1}{x}} = e^{x+3}$
4. $\left(e^{7x} - e\right)\left(e^{3x} - 1\right) = 0$

☛ Corrigé page 165.

Exercice 1.3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{2x} \leq e^{x+3}$
2. $e^{x+1} \leq \dfrac{1}{e^{x}}$

☛ Corrigé page 165.

Exercice 1.4.

Calculer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

1. $f_1(x) = 3e^{x} + 2$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = xe^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

③ $f_3(x)=\dfrac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

④ $f_4(x)=\left(e^x+1\right)\left(3e^x-x\right)$ sur $\mathbb{R}$.

☛ *Corrigé page 165.*

Exercice 1.5.

Déterminer sur leur ensemble de définition, le sens de variations de chacune des fonctions suivantes :

① $f_1(x)=-2e^x+5$

② $f_2(x)=(x+2)e^x$

③ $f_3(x)=xe^{-x}$.

☛ *Corrigé page 166.*

Exercice 1.6.

Pour chaque question de cet exercice, une seule proposition sur les quatre proposées est juste, laquelle ? Justifier.

① Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{1-4x}$.

a. $f'(x)=\dfrac{e^x}{-4}$

b. $f'(x)=\dfrac{e^x(5-4x)}{(1-4x)^2}$

c. $f'(x)=e^x(5-4x)$

d. $f'(x)=\dfrac{e^x(-3-4x)}{(1-4x)^2}$

② L'ensemble des solutions de l'inéquation $e-e^{-2+x}>0$ est :

a. $]-\infty;3[$

b. $[3;+\infty[$

c. $]2;+\infty[$

d. $]-\infty;2[$

③ Pour tout réel x, $e^{x+5}-2e^x$ est du même signe que :

a. e^5+2

b. e^x-2

c. e^{x+3}

d. e^5-2

④ Pour tout réel x, $e^{3x+2}\times e^x$ est égal à :

a. $e^{(3x+2)x}$

b. e^{4x+2}

c. $e^{3x}+2e^{2x}$

d. $e^{3x}\times e^{2x}$

☛ *Corrigé page 166.*

Exercice 1.7.

Sujet du BAC, exercice A, Amérique du Nord, 2021.

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

Pour tous réels a et b, on a : $\left(e^{a+b}\right)^2 = e^{2a} + e^{2b}$

☛ *Corrigé page 166.*

2
CHAPITRE

Limites de fonctions

L'essentiel du cours

Déterminer les limites d'une fonction f aux bornes de son ensemble de définition, c'est étudier l'évolution des valeurs de $f(x)$ lorsque x se « rapproche » des bornes ou d'un réel de l'ensemble de définition. Les bornes peuvent être infinies.

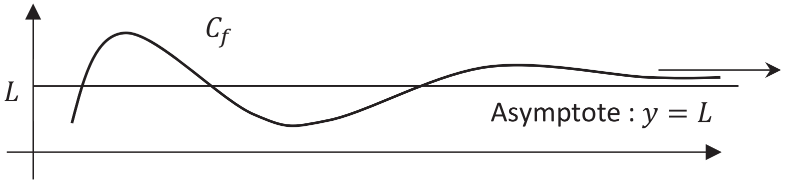
1 Limite quand *x* tend vers l'infini

DÉFINITION 2.1.

Soit L un réel.

La fonction f a pour **limite** L quand x tend vers $+\infty$ si toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand se situent à proximité de L.

Dans ce cas on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ et la droite horizontale d'équation $y = L$ est appelée asymptote horizontale à la courbe de f.



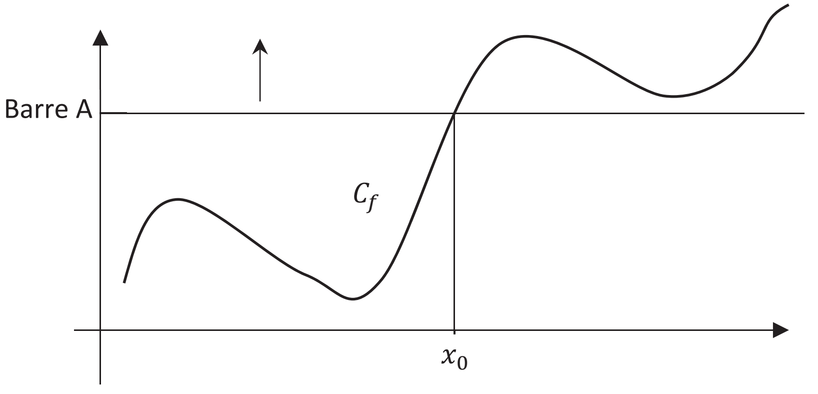
À savoir

- Tracer une fonction dans un repère.
- Graphiquement la courbe C_f vient se « coller » dans un tube centré sur la droite asymptote horizontale d'équation $y = L$.

DÉFINITION 2.2.

La fonction f a pour **limite** $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si pour tout réel A, toutes les valeurs de $f(x)$ passent au-dessus de A pour x assez grand.

Dans ce cas on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



À savoir

- Graphiquement, quelle que soit la hauteur de la « barre » A, la courbe C_f finit par passer au-dessus de la « barre » A.
- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en l'infini.
- Remarque : On a des définitions analogues quand x tend vers $-\infty$.

2 Limite quand *x* tend vers un réel *a*

DÉFINITION 2.3. LIMITE À GAUCHE DE *a*

La fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieures si quelle que soit la valeur de A, toutes les valeurs de $f(x)$ passent au-dessus de A pour x qui se rapproche de a par la gauche.

Dans ce cas on note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ et la droite d'équation $x = a$ est appelée asymptote verticale.