

Lalaonirina Rakotomanana Ravelonarivo

Licence
Master

Introduction à la mécanique des milieux continus déformables

Cours et exercices corrigés



Chapitre 1

Cinématique

1.1 Généralités

Le changement le plus évident que l'on puisse observer pour un corps dans la nature est la modification relative de sa position au cours du temps, ce que nous appelons le *mouvement*. La mécanique est la science du mouvement. Elle a pour objectif de décrire et de comprendre les mouvements, y compris les déformations, des corps et objets qui nous entourent en essayant de trouver des règles de fonctionnement : les lois de la mécanique.

La mécanique des milieux continus en est un sous-domaine et constitue une théorie qui a pour but de décrire, d'analyser et de prévoir la nature des mouvements des corps ainsi que leurs déformations, à une certaine échelle d'observation, avec des interactions qui s'exercent entre les parties de ce corps. La théorie de l'élasticité est une branche de la mécanique des milieux continus vouée à l'étude des mouvements et déformations de solides réversibles, soumis à des conditions de charge.

Bref historique de la mécanique. Sans prétendre être exhaustif, une brève revue historique peut être proposée. Aristote (-384, -322) posait en premier les bases d'une véritable théorie de la mécanique (paradigme d'Aristote). Aristote avait conclu que « Tout mobile suppose nécessairement un moteur ». Pour l'histoire, le mot mécanique en français désigne la partie des mathématiques qui a pour objet la connaissance des lois du mouvement et la théorie de l'action des machines (période de la Renaissance, 1559). Au XIV^e siècle, Nicholas Oresme représentait déjà le temps et les vitesses par des longueurs, avant que Descartes ne proposa son système de coordonnées cartésiennes. Le besoin de décrire le vecteur-vitesse contribua grandement au développement de la notion de dérivée en mathématiques. En ce même XIV^e siècle, les philosophes d'Oxford au Merton Collège, étudiaient les mouvements des objets

avec une accélération constante. Leurs études aboutissaient à la dite *Règle de Merton* : Un point matériel qui se meut avec une accélération constante parcourt la même distance qu'un point matériel qui se meut avec une vitesse égale à la moyenne de sa vitesse initiale et finale. Au XVII^e siècle, Galileo Galilei (1564-1642) (Galilée) et d'autres savants avaient découvert qu'un objet qui tombe dans le vide se meut avec une accélération constante et par conséquent suit la Règle de Merton.

Dès 1604, Galilée avait effectivement découvert que les objets tombent avec une accélération constante et il a constaté que les trajectoires des projectiles sont paraboliques. Le génie de Galilée a été néanmoins de proposer que l'état de mouvement d'un corps soustrait à toute force soit reconnu comme celui d'un mouvement rectiligne et uniforme. Ceci constitue l'introduction majeure au principe d'inertie sur lequel Isaac Newton viendra fonder la mécanique classique. Les fondements scientifiques de cette mécanique classique ont été développés par I. Newton (1645-1727) dans son œuvre *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687) (paradigme de Newton). En mécanique newtonienne le rôle de la force est de modifier le mouvement d'un corps, mais pas tant le créer, comme le pensait Aristote. D'autres physiciens et mathématiciens ont contribué à cette science : Archimède, Kepler, Descartes, Huyghens, Laplace, Lagrange, Hamilton, Mach et Einstein. De facto, la mécanique se place entre les mathématiques (méthodes théoriques, modélisation mathématique) et la physique (objets d'études, méthodes expérimentales).

Point matériel. Si le corps est de faible dimension par rapport aux variations de sa position, on peut assimiler le mouvement du corps au mouvement à celui de son centre. On parle alors de mécanique du point. Si le corps est de plus grande dimension, son mouvement ne peut plus être analysé comme étant le mouvement d'un seul point (sauf si il ne tourne pas autour de lui-même). Cette partie de la mécanique s'appelle la mécanique du solide.

La mécanique du point concerne l'étude de corps de taille suffisamment petite (par rapport aux distances parcourues) pour pouvoir les assimiler à des points. En plus, nous négligeons la rotation du corps sur lui-même même s'ils pourraient avoir une influence sur le mouvement général du corps. On pourrait parler de mécanique du point matériel pour signifier qu'il s'agit d'étudier le mouvement de corps ponctuels de par leur taille et qui ne tournent pas sur eux-mêmes. La mécanique des milieux continus est un concept basé sur un ensemble de points matériels qui sont supposés contigües et forment un ensemble continu dans l'espace.

Au-delà du point matériel, il existe plusieurs autres corps et domaines d'application de la mécanique notamment : la mécanique céleste (astres) et la mécanique des corps rigides ; la mécanique des fluides (gaz et liquides) ;

la mécanique des milieux continus (solides et milieux déformables) ; la mécanique quantique (atomes, molécules, corps infiniment petits) et la mécanique relativiste (corps à grande vitesse, proche de celle de la lumière).

Bref historique de l'élasticité. Une branche importante de la mécanique des milieux continus est formée par la théorie de l'élasticité. Nous présentons ici un bref historique de la théorie de l'élasticité qui est loin d'être complet et surtout pas exhaustif. Historiquement, Galilée peut être considéré de nouveau comme le premier mathématicien à se pencher sur le problème de l'élasticité des corps, notamment les poutres, même s'il n'avait pas développé une théorie proprement dite dans ce domaine.

Le concept de contrainte a pris près d'un siècle à émerger. A la fin du XVII^e siècle James Bernoulli s'intéressa aux cordes vibrantes et plus tard John Bernoulli en 1739 introduisit la notion de forces hydrauliques comme forces internes dans de l'eau. Euler généralisa ces notions parcellaires en un concept plus systématique de la pression interne dans les fluides. Newton considéra la relation entre la viscosité d'un fluide et des contraintes de cisaillement. Parent en 1713 et Coulomb en 1773, en relation avec le type de frottement entre des solides qui porte son nom, avaient été des précurseurs concernant l'imagination des contraintes tangentielles dans les poutres. Pour en arriver à la notion de contrainte tridimensionnelle, concernant l'élasticité, Navier et Cauchy, en s'inspirant des conceptions physiques de Laplace, peuvent être considérés comme ayant marqué la fondation de la théorie générale de l'élasticité en 1821. Les travaux de Cauchy étaient essentiels dans les années 1820 pour définir la notion de solide élastique.

Cauchy a écrit trois mémoires, publiés en 1827-1828, sur le concept de « tension » et de déformation autour d'un point du corps solide exprimées en fonction des six composantes (tenseur de déformation). Toutefois, le premier article de Cauchy sur les fondements de la mécanique des milieux continus *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non-élastiques* en 1823, constitue le tournant majeur et la pierre fondatrice dans la modélisation des milieux continus, et non seulement en élasticité. Il a montré en termes clairs et explicites l'existence du tenseur de contrainte et des lois de la mécanique gouvernant les milieux continus. Un peu plus tard en 1828, Cauchy a écrit les équations qui gouvernent la dynamique des milieux continus *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide élastique ou non élastique* en 1828. Ces équations restent à ce jour les équations de base du mouvement des milieux continus et qui portent son nom.

Navier a développé les équations particularisant les équations de Cauchy. Néanmoins, la contribution majeure de Navier était son mémoire sur les lois

du mouvement des fluides en 1822, à l'origine des équations de Navier-Stokes pour la modélisation en mécanique des fluides visqueux. De manière indépendante, Lamé et Clapeyron ont rédigé un mémoire historique sur la théorie de l'élasticité pendant leur séjour en Russie en 1828. Mais il faut également retenir que le développement de la théorie de l'élasticité a conduit Lamé à introduire pour la première fois de manière systématique les coordonnées curvilignes ou les paramètres différentiels. Le lien entre les équations de Cauchy et celles de Navier provient des lois de comportement particulières déduites des modèles de milieux élastiques supposés suivre la loi de Hooke. En effet, une loi de comportement élastique a été énoncée par le physicien anglais Hooke en 1676. Cette loi modélise le comportement des solides élastiques soumis à des efforts internes. Elle stipule que la déformation élastique est proportionnelle aux contraintes. Sous sa forme la plus simple, elle relie l'allongement à la force appliquée.

Dans la modélisation des lois de comportement élastiques, un des problèmes de cette époque était néanmoins de savoir combien de paramètres élastiques indépendants sont nécessaires pour représenter les matériaux élastiques anisotropes. Les travaux du mathématicien anglais Green en 1837 ont permis de clore plus ou moins ce débat et trouver le nombre 21. Il s'en suit la notion d'hyperélasticité de Green qui est basée sur l'existence d'énergie potentielle élastique. Dès 1850, l'utilisation de la théorie de l'élasticité pour la recherche des solutions dans les applications aux structures a été marquée par certains travaux notamment de ceux de St-Venant sur les poutres et arcs élastiques, de Kelvin et Boussinesq sur les réponses des milieux élastiques aux forces concentrées, de Pochhammer, de Lamb pour les vibrations et ondes élastiques. Plus récemment, les travaux de Truesdell (sous l'encouragement de von Mises) et ses co-auteurs, Toupin et Noll, ont posé les bases thermomécaniques pour l'histoire plus récente de la mécanique des milieux continus à l'apparition de deux livres majeurs *The Classical Field Theories* en 1960, et *The Non-Linear Field Theories of Mechanics* en 1965.

Objet d'étude. La mécanique des milieux continus est un sous-domaine de la mécanique consacré à l'étude de comportement de matériaux à l'échelle « humaine » ou encore macroscopique où l'on tient compte des déformations internes. Elle consiste essentiellement à construire des modèles mathématiques qui permettent d'appréhender certains phénomènes notamment de déformations à l'intérieur de ces matériaux (ou matières) lorsqu'ils sont soumis à des efforts extérieurs induisant des efforts internes. Les milieux continus constituent une vaste classe de matériaux (cf. Figure 1.1) et se situant entre les corps observables à l'échelle humaine et la matière microscopique de la physique des matériaux

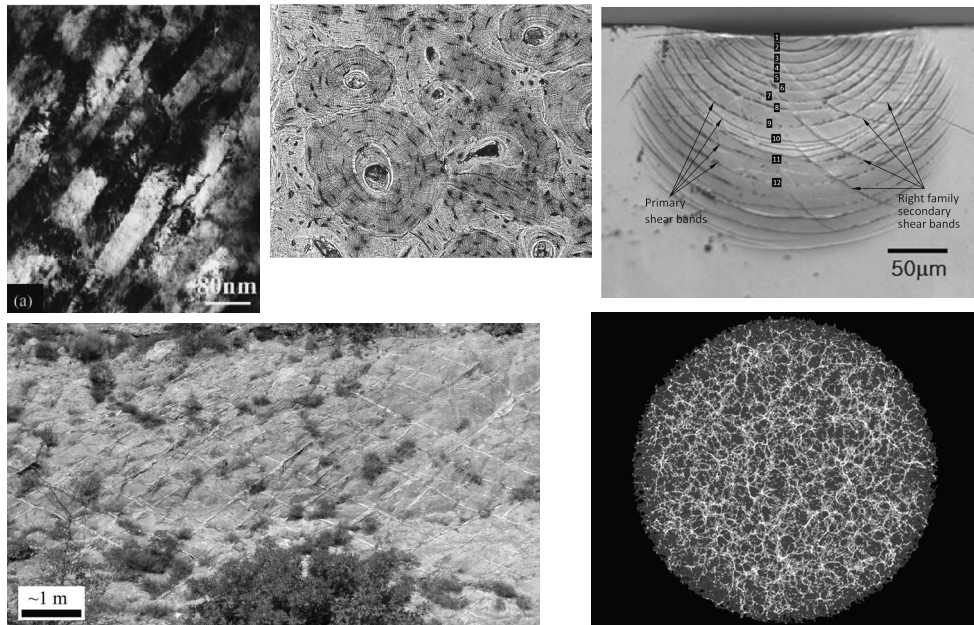


FIGURE 1.1 – Différentes sortes de matériaux pouvant faire l’objet de modélisation par la mécanique des milieux continus : alliage métallique, tissu osseux, métaux sous indentation, roches en géophysique, galaxie, ...

Mécanique classique - Temps absolu. *Dans ce livre, nous nous intéressons à des corps dont les vitesses sont petites par rapport à celle de la lumière et les dimensions suffisamment importantes par rapport aux particules physiques ($\gg 10^{-9}[m]$) (Figure 1.2).* Nous supposons aussi que le temps est absolu et s’écoule uniformément de la même manière pour tous les corps à étudier. On admet ainsi l’existence d’un espace de référence absolu (Newton) et *in fine* l’existence d’un ensemble d’espace de référence, en mouvement de translation les uns par rapport aux autres (Galilée). Comme objet d’étude, il est remarquable que la mécanique classique, basée sur les lois de Newton, s’applique sans être démentie de la grosse molécule de matériaux jusqu’au système solaire avec une précision remarquable. La mécanique des milieux continus trouve ainsi son champ d’applications à ces différentes échelles. Depuis Einstein, la relativité admet que le duo espace-temps est dynamique : il n’est pas uniforme et peut être modifié par les objets massifs (relativité générale). Le temps n’est pas découplé de l’espace. Cela change totalement la vision proposée par la mécanique au sens de Newton, pour laquelle les objets célestes prenaient place dans un univers statique pour les mouvements des planètes.

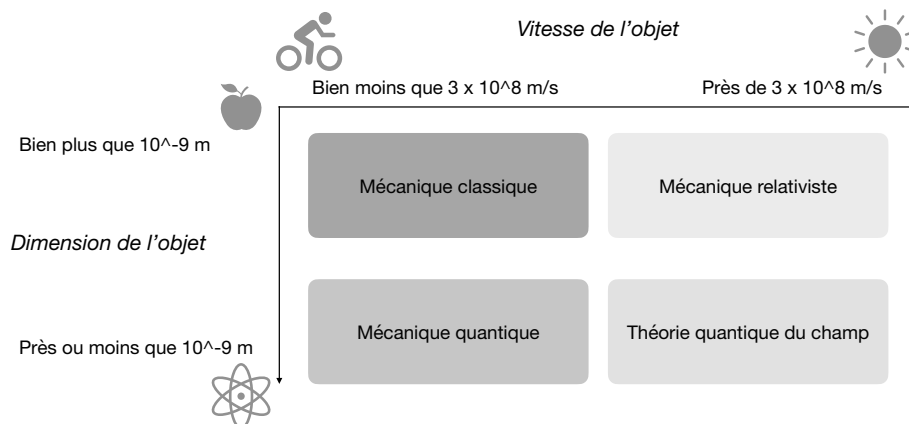


FIGURE 1.2 – Place de la mécanique classique parmi les domaines de la physique, relative à la dimension et à la vitesse des objets étudiés.

La mécanique classique décrit avec précision le mouvement des objets, à condition qu'ils soient beaucoup plus grands que les atomes et qu'ils se déplacent beaucoup moins vite que la vitesse de la lumière. Elle continue d'être utilisée des champs de recherche qui demandent des solutions comme en dynamique multi-corps, en mécanique des milieux continus généralisés, mécanique des fluides, et bien d'autres domaines encore.

Echelles d'études et milieu continu. Un matériau n'est jamais continu, il est même composé essentiellement de vides. Même à une échelle microscopique il est hétérogène comme le montre la Figure 1.3 qui représente une coupe d'un alliage d'aluminium. Les grains sont visibles sur la photo $n^o = 4$. Quand on éloigne de plus en plus la photo pour passer du $n^o = 4$ au $n^o = 1$, les grains sont de moins en moins visibles. Le concept de continu est lié à l'échelle d'observation. La taille d'un grain par rapport à la dimension de l'échantillon est un paramètre important pour choisir le modèle de milieu continu à concevoir.

Pour comprendre de manière la plus précise possible le fonctionnement de la matière et des matériaux, il faut tenir compte du fait que la matière est structurée à différentes échelles. Tout phénomène physique / chimique / mécanique dans un matériau résulte finalement de différents processus qui se produisent à des échelles comprises entre celle de l'atome, voire subatomique, et celle de l'univers. La modélisation consiste à choisir les bonnes échelles pour mettre en exergue les processus les plus pertinents.

Il faut également considérer les efforts extérieurs en tenant compte de leur vitesse d'application. Une question qui reste actuelle serait aussi de savoir

pourquoi des vitesses différentes induisent des comportements différents avec des modifications des structures internes comme les bandes de cisaillement. Bien que cela ne soit pas l'objet spécifique de ce livre, la mécanique des milieux continus peut répondre entre autres à ces questions par l'analyse des changements internes qui sévissent dans ces matériaux.

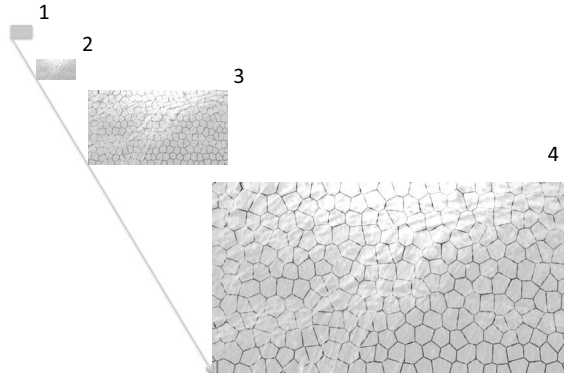


FIGURE 1.3 – Alliage d'aluminium à différentes échelles d'observations. Le matériau est homogène en 1 et devient hétérogène en 4.

D'une manière générale, étant un sous domaine de la mécanique, la mécanique des milieux continus se divise également en quatre parties : la cinématique (déformation), la statique (contrainte), les lois de conservation et les lois de comportement.

1.2 Cinématique du point

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement d'un corps indépendamment des causes qui ont donné naissance à ce mouvement.

1.2.1 Référentiel, repère, mouvement

La mécanique classique de Newton admet l'existence a priori d'un temps et d'un espace absolu. La notion d'absolu peut être considérée plus comme une notion de limite asymptotique (idéalisée mathématique) que comme un temps et un espace sous-jacent réel. Nous admettons les deux hypothèses classiques suivantes.

- Il existe un solide de référence rigide (espace) et un phénomène périodique de référence (temps).

- Le temps et l'espace sont homogènes (translation, addition), isotropes (rotation, réflexion), euclidiens (mesurables), continus (indéfiniment subdivisibles) et infinis (indéfiniment prolongeables).

En conséquence, on peut alors définir un référentiel (un corps rigide et un chronomètre). Le corps rigide est défini par un origine O et une base cartésienne $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Le temps est représenté par $t \in \mathbb{R}$ (nombres réels). Le temps et l'espace sont supposés découplés l'un de l'autre en mécanique classique.

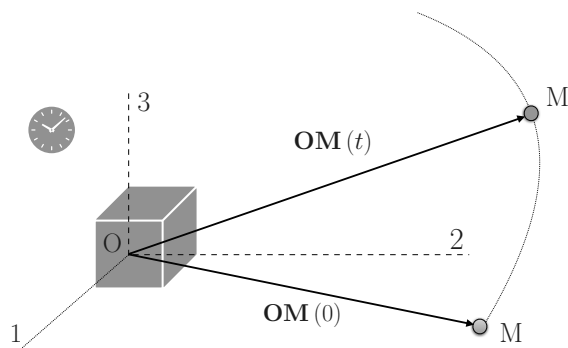


FIGURE 1.4 – Référentiel : Un point matériel M qui se trouve en $\mathbf{OM}(t)$ et un corps de référence (solide). Au corps de référence est attaché un système d'axes (3 axes) et un origine O . Le couple formé par ce corps de référence et l'horloge (temps absolu) avec un origine du temps forme le *référentiel* pour étudier le mouvement du point matériel. Le point matériel M se trouve en $\mathbf{OM}(0)$ pour $t = 0$.

Mesure de longueur et d'angle dans l'espace. En mécanique classique, l'espace ambiant, associé au corps de référence, est muni d'un tenseur métrique euclidien, pour mesurer les longueurs des vecteurs et les angles entre les vecteurs. Le métrique est défini à partir du produit scalaire (forme bilinéaire) :

$$\mathbf{g} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R},$$

dans laquelle \mathcal{E} est l'espace vectoriel qui sous-tend l'espace affine des points de l'espace euclidien, tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \text{ si et seulement si } \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

A l'aide du tenseur métrique, nous calculons :