MATHS APPLIQUÉES INFORMATIQUE

ECG-1

Christophe FISZKA

Adrien SIRIEYS

- Le cours détaillé
- Plus de 500 exercices avec indications et solutions
- Les méthodes et pièges à éviter
- Le cours et travaux pratiques en Python

ellipses

CHAPITRE 1

Calculs

La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calculs.
GALILÉE (1564-1642)

Five out of four people have trouble with fractions.
STEVEN WRIGHT acteur américain

La maîtrise du calcul est une condition nécessaire à la bonne réussite en mathématiques. Ce chapitre propose une succession d'exercices autour du calcul algébrique (résolution d'équations, d'inéquations ...), du calcul avec les fonctions usuelles (racine carrée, logarithme, exponentielle) puis autour du calcul de dérivée. À ce titre, il peut être traité avant le début des cours de première année.

1 Calculs algébriques

1.1 Simplifier, factoriser et développer

Dans la suite, une expression algébrique est une expression de la forme :

$$x^2+2x, \qquad x^3+(2x+4)(x^2+x^4)+\frac{x+1}{x^2+5}, \qquad xy+y^3\ldots$$

où les quantités x, y sont des nombres réels. Pour étudier de telles expressions, on utilisera principalement les **identités remarquables** suivantes (valables pour tous réels a, b) :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2. \qquad & a^2-b^2 &= (a-b)(a+b).\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2.\end{aligned}$$

Rappelons aussi la somme géométrique. Pour un réel q différent de 1 et $n \in \mathbb{N}$,

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exercice 1. ✦ Sans calculatrice, simplifier :

$$a = \frac{64 \times 7}{2^3 \times 14}. \qquad b = \frac{2 + \frac{2}{3}}{\frac{2}{9}}. \qquad c = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}.$$

$$d = \frac{(10^3)^4}{10^{10}} \times 5^{-3} \times (5^5 - 5^3). \qquad e = \frac{\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{8} \times \frac{6}{5}\right)}{\frac{1}{5} - \frac{2^5}{2^7 \times \left(\frac{9}{6} - \frac{1}{2}\right)}}. \qquad f = 101^2 - 99^2.$$

$$g = 10001^2 + 9999^2. \qquad h = \frac{-1}{(-1)^n} - \frac{(-1)^{3n+1} \times (-1)^n}{(-1)^{5n+3}}. \qquad i = \frac{\left(x^3 \cdot x^1\right)^5}{\left(x \cdot x^{-2}\right)^4} \quad (x \in \mathbb{R}^*).$$

Exercice 2. ✦ Soient x et y deux réels.

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$a(x) = \frac{3x}{3x-1} - \frac{2x}{2x+1}, \qquad b(x) = \frac{x - 1 + \frac{1}{x+1}}{x^2}, \qquad c(x) = \frac{\frac{x-4/x}{2}}{\frac{1-2/x}{2}}.$$

2. Développer et réduire :

$$d(x) = 2\left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{1}{15}\right), \qquad e(x) = (x+1)(x+2)(x-1)(x-2),$$

et

$$f(x, y) = (x - 3y)(x + 3y)(x^2 + 9y^2)(x^4 + 81y^4).$$

Exercice 3. Soient x et y deux réels. Factoriser les expressions suivantes :

✧ $\mathrm{A}(x) = x^2 - 81,$ $\qquad \mathrm{B}(x) = (2x+1)^2 - (4x+1)^2,$

$\mathrm{C}(x) = (5+x)^2 - 36x^2,$ $\qquad \mathrm{D}(x) = 4x^2 - 9,$

✦ $\mathrm{E}(x) = 9x^2 + 30x + 25,$ $\qquad \mathrm{F}(x) = (2x-3)(x+1) - (2x-3)(2x+3),$

$\mathrm{G}(x) = (x^2 - 16) + (x-4)(5x+7),$ $\qquad \mathrm{H}(x) = (4x-3)(x+2) - 20x + 15,$

✦✦ $\mathrm{I}(x) = (4x+8)(x-2) + (4-2x)x + (x+2)(6-3x),$ $\qquad \mathrm{J}(x) = x^3 - x^2 - x + 1,$

$\mathrm{K}(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x - 3,$ $\qquad \mathrm{L}(x, y) = 9x^2y^4 - 3x^4y^2 - 6x^3y^2 + 18xy^4.$

Exercice 4. ✦✦✦ Sachant que $x + 1/x = 5$, calculer $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ et $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$. ⋙ **Aide**

1.2 Équations, inéquations inégalités

Dans de nombreux cas, on est amené à résoudre des équations $f(x) = 0$ ou des inéquations $f(x) \geqslant 0$ avec $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, une fonction. C'est-à-dire à déterminer tous les réels $x \in \mathrm{I}$ pour lesquels les énoncés $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont vrais.

Équations

Exercice 5. ✦ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{E}_1 : \quad (2x+7)^2 - (x-5)^2 = 0, \qquad \mathrm{E}_2 : \quad \frac{2x^2+1}{3+x} = 2x, \qquad \mathrm{E}_3 : \quad \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{5}{(x-1)(x+1)},$$

$$\mathrm{E}_4 : \quad x^4 + 4 = 4x^2, \qquad ✦✦ \quad \mathrm{E}_5 : \quad (x^4 - x^3 + 4x - 1)^2 = (x^4 + x^3 - 4x - 1)^2.$$

Exercice 6. ✦✦ **Résolution d'une équation de degré 3**
Soient a, b, c, et d quatre réels tels que $ad = bc$ avec $a \neq 0$. On pose $\mathrm{P}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $\mathrm{P}(x) = a\left(x^2 + \dfrac{c}{a}\right)\left(x + \dfrac{b}{a}\right)$.
2. Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R}$, $2x^3 + 6x^2 - 8x - 24 = 0$.

Inéquations

Exercice 7. ✧ Donner le tableau de signe de l'expression $f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x+1)^2}$.
Résoudre ensuite $f(x) > 0$ et $f(x) \leqslant 0$.

Exercice 8. ✦ Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{I}_1 : \quad 5x + 7 \leqslant 5 - x, \qquad \mathrm{I}_2 : \quad (x+8)(3-2x) \leqslant 0, \qquad \mathrm{I}_3 : \quad \frac{2x+1}{x-1} < 0,$$

$$\mathrm{I}_4 : \quad \frac{3x}{x^2 - 6x + 9} \geqslant 0, \qquad \mathrm{I}_5 : \quad 2x^2 \leqslant 18, \qquad \mathrm{I}_6 : \quad (x-1)(x^2+9) < 6(x-1)x,$$

$$\mathrm{I}_7 : \quad \frac{3x}{x^2 + x + 1} < 1.$$

Exercice 9. ✦✦✦ **Inéquation avec un paramètre** ⋙ **Aide**
Résoudre en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, l'inéquation $\mathrm{I}_\alpha : \left(\alpha^2 - 1\right)x < \alpha + 1$.

Inégalités

Exercice 10. ✦ Prouver les énoncés suivants. ⋙ **Aide**

1. Pour tout réel $x > 1$, $\frac{2x-3}{x-1} < 2$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
3. Soient $x \in]1; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x^n - 1}{x-1} \leqslant nx^{n-1}$.
4. Soient x, $y \in]-1; 1[$, $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$.

Exercice 11. ✦✦✦ Soient x, y et z, trois réels positifs tels que $x^2 + y^2 \leqslant z^2$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $x^n + y^n \leqslant z^n$.
2. Est-ce vrai ... ⋙ **Aide**
   (a) si $n = 1$?
   (b) si x, y et z sont des réels éventuellement négatifs ?

2 Racine carrée, exponentielle et logarithme

2.1 Racine carrée

Exercice 12. ✦ Simplifier les expressions suivantes : ⋙ Aide

$$a=\sqrt{\frac{(-5)^2\cdot 49}{2^6}},\quad b=\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}},\quad c=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

$$d=\frac{\sqrt{125}-\sqrt{20}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1},\quad e=\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\quad\text{et}\quad f=\sqrt{x^2+6x+9}\quad(x\in\mathbb{R}^+).$$

Exercice 13. ✦ Exprimer sous la forme x^y le nombre $\sqrt{2}\sqrt{4}\sqrt{8}\sqrt{16}\sqrt{32}\sqrt{64}\sqrt{128}$.

Exercice 14. ✦✦ Justifier que pour tous réels x, y, $\sqrt{x+y}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}$.
À quelle condition sur x et y, a-t-on égalité ?

Rappel. Soient $f, g : \mathrm{I}\to\mathbb{R}$ deux fonctions. Le réel $x\in\mathrm{I}$ est solution de l'inéquation $\sqrt{f(x)}\geqslant g(x)$ si et seulement si $f(x)\geqslant 0$ et $f(x)\geqslant g(x)^2$.

Exercice 15. ✦✦ **Inéquations avec des racines carrées**
Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{I}_1:\quad\sqrt{x}\geqslant x\qquad \mathrm{I}_2:\quad\sqrt{2x-1}\geqslant 1\quad\text{et}\quad \mathrm{I}_3:\quad\sqrt{2x-1}\geqslant x.$$

Exercice 16. ✦✦ **Équations avec des racines carrées**
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{E}_1:\quad\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=2\qquad \mathrm{E}_2:\quad\sqrt{6x-9}=x\quad\text{et}\quad \mathrm{E}_3:\quad x=2\sqrt{x}+3.$$

Exercice 17. ✦✦✦ **Inégalité arithmético-géométrique**

1. Prouver que pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$. ⋙ Aide
2. Soient a, b, c et d quatre réels positifs.
   En appliquant la relation précédente à $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{cd}$. Prouver que $\sqrt[4]{abcd}\leqslant\frac{a+b+c+d}{4}$.
   Remarque. Pour un réel x positif, on pose $\sqrt[4]{x}=\sqrt{\sqrt{x}}$.
3. *Applications*

   (a) Justifier que pour tous réels x, y et z strictement positifs $x+y+z+\dfrac{1}{xyz}\geqslant 4$. ⋙ Aide

   (b) i. On se donne un rectangle de périmètre p. Justifier que l'aire est inférieure à $p^2/16$.

   ii. Pour quel type de rectangle a-t-on égalité ?

2.2 Logarithme et exponentielle

PROPOSITION **Règles de calculs**

Pour tous réels a et b strictement positifs, tout entier n,

$$\ln(1)=0,\quad \ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$$

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b),\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)\quad \textit{et}\quad \ln(a^n)=n\ln(a).$$

Exercice 18.

1. ✧ Exprimer avec ln(2) les nombres :

$$a=\ln(8),\quad b=\ln(52),\quad c=\ln(0,125),\quad d=\ln(72)-2\ln(3).$$

2. ✦ Simplifier :

$$\mathrm{A}=\ln\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right),\quad \mathrm{B}=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln(2-\sqrt{3}),\quad \mathrm{C}=\ln\left(\sqrt{10}-3\right)-\ln\left(1/(\sqrt{10}+3)\right),$$

$$\text{et}\quad \mathrm{D}=\ln\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right).$$

PROPOSITION **Règles de calculs**

Pour tous réels a et b, tout entier n, $\exp(0)=1,\quad \exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)},$

$$\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b),\quad \exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}\quad \textit{et}\quad \exp(na)=\exp(a)^n.$$

De plus, pour $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}_*^+$, $\ln\left(\exp(x)\right)=x\quad \textit{et}\quad \exp\left(\ln(y)\right)=y.$

Rappels.

- Si on note $\mathrm{e}=\exp(1)$, alors pour tout réel x, $\exp(x)=\mathrm{e}^x$.
- Les fonctions exponentielle et logarithme définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_*^+$ sont croissantes.

Exercice 19. ✦✦ Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)-\ln\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)=x\quad \text{et}\quad \ln\left(\mathrm{e}^x+3x\right)-\ln(1+3x\mathrm{e}^{-x})=x.$$

Exercice 20. ✦✦✦ Résoudre l'inéquation puis l'équation :

$$\mathrm{I}:\quad \ln(x^2-2x)<\ln(3)\quad \text{puis}\quad \mathrm{E}:\quad \ln(3-x)+\ln(3+x)=\ln(1+x^2).$$

3 Dérivation

3.1 Les dérivées usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivation	Expression de la dérivée
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x \mapsto 1/x$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-1/x^2$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*_*$	$1/(2\sqrt{x})$
exp	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
ln	$\mathbb{R}^+_*$	$\mathbb{R}^+_*$	$1/x$

3.2 Règles de calculs

PROPOSITION **Linéarité, produit et quotient**

Soient $u, v : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *Les fonctions λu et $u+v$ sont dérivables sur I avec $(\lambda u)' = \lambda u'$ et $(u+v)' = u'+v'$.*
- *La fonction produit $u \cdot v$ est dérivable sur I avec $\left(u \cdot v\right)' = u'v + uv'$.*
- *Si de plus v ne s'annule pas sur I, la fonction u/v est dérivable sur I avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.*

Exercice 21. ✦ Préciser l'ensemble de dérivation et calculer la fonction dérivée.

$$f_1 : x \mapsto (x^2+1)\ln(x), \quad f_2 : x \mapsto \frac{x^3+2x^2}{2e^x}, \quad f_3 : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{4x^2+1}, \quad f_4 : x \mapsto \frac{x}{1-\ln(x)}.$$

Exercice 22. ✦ Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+_*$, on pose $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a, b tel que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$. ⋙ **Aide**
2. En déduire la dérivabilité sur $\mathbb{R}^+_*$ et le calcul de f' et $f'' = (f')'$.

Anticipons sur le théorème de dérivation d'une fonction composée qui sera prouvé au second semestre.

THÉORÈME **Composition**

Soient $u : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ et $v : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Si
- *u est dérivable sur I.*
- *v est dérivable sur J.*

***Alors** la fonction $f : x \in \mathrm{I} \mapsto v\big(u(x)\big)$ est dérivable en I avec pour tout réel $x \in \mathrm{I}$*

$$f'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big).$$

Exemples. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur I. Pour deux réels a, b, on pose $\mathrm{I}_{a,b}$, l'ensemble des réels x pour lesquels $ax + b$ est dans I.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la composée $u^n : x \in \mathrm{I} \mapsto \big(u(x)\big)^n$ est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- La composée $\mathrm{e}^u : x \in \mathrm{I} \mapsto \exp\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u$.
- La composée $u_{a,b} : x \in \mathrm{I}_{a,b} \mapsto u(ax + b)$ est dérivable sur $\mathrm{I}_{a,b}$ et $(u_{a,b})'(x) = au'(ax + b)$.
- Si de plus, u ne s'annule pas sur I, $1/u : x \in \mathrm{I} \mapsto 1/u(x)$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
- Si de plus, u est strictement positive sur I, $\ln(u) : x \in \mathrm{I} \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I, $\big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u}$.
- Si de plus, u est strictement positive, $\sqrt{u} : x \in \mathrm{I} \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $\big(\sqrt{u}\big)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Méthode

Comment rédiger la dérivation d'une composée ?

Exemple. Étudions la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$. On pose

$$u : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & 1 + x^2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad v : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{t}. \end{array}\right.$$

de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = v\big(u(x)\big)$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1; +\infty[$ en tant que fonction polynomiale. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.
- v est dérivable sur $[1; +\infty[\subset \mathbb{R}_*^+$. Pour tout $x \geqslant 1$, $v'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Exercice 23. ✦✦ Préciser l'ensemble de dérivation et calculer la fonction dérivée.

$$f_1 : x \mapsto (2x + 1)^4, \quad f_2 : x \mapsto (x^2 + 1)^3, \quad f_3 : x \mapsto \ln(x)^2,$$
$$f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{3x^3}, \quad f_5 : x \mapsto \ln\big(\ln(x)\big), \quad f_6 : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}.$$

3.3 Applications

Lorsque la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable (I est un *intervalle*), il existe un bon critère pour étudier les variations de la fonction : le signe de la dérivée.

Proposition — **Dérivabilité et croissance**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction avec* I *un intervalle. Alors*

$$f \text{ est croissante sur I si et seulement si } f'(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \mathrm{I}.$$

$$f \text{ est décroissante sur I si et seulement si } f'(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \mathrm{I}.$$

De plus,
$$f \text{ est constante sur I si et seulement si } f'(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathrm{I}.$$

Exercice 24. ✦ Que pensez-vous de la rédaction suivante ?
La fonction $f(x) = 1/x$ *est définie pour* $x \neq 0$. *De plus, on a* $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0$.
La dérivée est négative, d'après le théorème précédent, la fonction $1/x$ *est décroissante.*

Exercice 25. ✧ Donner le tableau de variations des fonctions suivantes :

$$f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x\ln(x), \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad h : x \in \mathbb{R} \mapsto x\mathrm{e}^{-x}.$$

Méthode

Établir une inégalité via une étude de fonctions

Justifions que pour tout réel x

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x.$$

Cette inégalité est équivalente à $\mathrm{e}^x - (1+x) \geqslant 0$. On introduit alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - (1+x).$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel x

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Or, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
On a donc un minimum atteint en 0.
Pour tout réel x, $f(x) \geqslant f(0)$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que la fonction f est positive et l'inégalité est prouvée.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$