OPTIMUM

1re et 2e année

# Toute l'analyse

## Maths appliquées

ECG

- Cours et méthode
- Astuces et pièges à connaître
- Exercices et problèmes d'entraînement
- QCM d'évaluation et extraits d'annales

Hédi **Joulak**

ellipses

# L'essentiel du cours

## Généralités

### *Définition*

Une application $f$ est une relation entre deux ensembles pour laquelle chaque élément $x$ du premier (appelé ensemble de départ) est associé à un unique élément $y = f(x)$ du second (ensemble d'arrivée).

L'élément $x$ est appelé antécédent de $y$ ; l'élément $y = f(x)$ est appelé image de $x$.

*Il y a une différence - dont on peut se passer en première lecture - entre la notion d'application et celle de fonction. L'application nous précise que tout élément de l'ensemble de départ a une image (et une seule) alors que l'on n'impose rien pour l'ensemble de départ d'une fonction ; ainsi, on pourra parler de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ mais pour l'application, il nous faudra considérer $f$ sur $\mathbb{R}_+$.*

### *Restriction d'une application*

On considère une application $f : E \longrightarrow F$ et $A \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle restriction de $f$ à $A$ l'application, notée $f_{|A}$, définie sur $A$ par :

$$\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$$

*La restriction (unique pour un sous-ensemble donné) est donnée pour faire apparaître une propriété intéressante sur la nouvelle application. Ainsi, l'application $f : x \mapsto x^2$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ alors que sa restriction à $\mathbb{R}_+$, $f_{|\mathbb{R}_+}$, l'est.*

### *Prolongement d'une application*

On considère une application $f : E \longrightarrow F$ et $B$ un ensemble tel que $E \subset B$.
On appelle prolongement de $f$ à $B$ toute application $\widetilde{f}$ définie sur $B$ par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \widetilde{f}(x)$$

**Le conseil du prof :**
*Pour une application $f$ et un ensemble $B$ donnés, le prolongement n'est pas unique (sauf exception). Ainsi, l'application $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ admet une infinité de prolongements $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ a \quad si \quad x = 0 \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$ (le prolongement donné avec $a = 1$ sera le seul prolongement continu sur $\mathbb{R}$ de $f$).*

## La composition

$\star$ On considère les applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
On définit la composée de $f$ et de $g$, et on note $g \circ f$, l'application :

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$\star$ La composée est associative : pour $f : E \longrightarrow F$, $g : F :\longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$, on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

**Le conseil du prof :**
*Pour calculer la composée $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ on remplace dans l'expression de $g(x)$ la variable $x$ par l'expression de $f(x)$.*
*Ainsi, si $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 + 2x$, on a :*

$$g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^3 + 2(x^2 + 1).$$

# Injection, surjection, bijection

### *Définitions*

On considère une application $f : E \longrightarrow F$.

$\star$ On dira que $f$ est injective si : $\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

$\star$ On dira que $f$ est surjective si : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$.

$\star$ On dira que $f$ est bijective si : $\forall y \in F,\ \exists\,!\ x \in E,\ y = f(x)$ (c'est-à-dire injective et surjective).

Dans le cas où $f$ est bijective, on notera $f^{-1}$ son application réciproque et on a l'équivalence : $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$ (ce qui donne $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$).
On a aussi $f^{-1} : F \longrightarrow E$.

*On peut traduire la notion d'injectivité par : tout élément de $F$ admet au plus un antécédent par $f$ dans $E$.*
*Pour la surjectivité : tout élément de $F$ admet au moins un antécédent par $f$ dans $E$.*
*Et pour la bijectivité : tout élément de $F$ admet un unique antécédent par $f$ dans $E$.*

***Le conseil du prof :***
*Lorsque l'on nous demande de montrer qu'une application est bijective et que l'on exige l'application réciproque $f^{-1}$, on pensera directement à la résolution de l'équation $y = f(x)$ pour avoir les deux dans un même élan.*

### *Composée de deux bijections*

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections.
Alors, la composée $g \circ f$ est aussi bijective et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

# Les basiques

**★☆☆ Exercice 1 : composée, injectivité et surjectivité**

Soit $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ deux applications.

1. Montrez que : $f$ et $g$ injectives $\Longrightarrow g \circ f$ injective.
2. Montrez que : $f$ et $g$ surjectives $\Longrightarrow g \circ f$ surjective.
3. Montrez que : $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.
4. Montrez que : $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.

1. On suppose que $f$ et $g$ sont injectives, montrons que $g \circ f$ l'est aussi.
   On suppose que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in A$.
   Cela s'écrit : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ ; comme $g$ est injective et que $f(x_1), f(x_2) \in B$, on a : $f(x_1) = f(x_2)$.
   À présent, comme $f$ est injective et que $x_1, x_2 \in A$, on a : $x_1 = x_2$.
   En résumé, $g \circ f$ est bien injective.
2. On suppose que $f$ et $g$ sont surjectives, montrons que $g \circ f$ l'est aussi.
   Comme $g : B \longrightarrow C$ est surjective, on a :
   $$\forall z \in C,\ \exists y \in B,\ z = g(y)$$
   Comme $y \in B$ et que $f : A \longrightarrow B$ est surjective, on a :
   $$\exists x \in A,\ y = f(x)$$
   En résumé, on a montré que :
   $$\forall z \in C,\ \exists x \in A,\ z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$
   c'est-à-dire : $g \circ f : A \longrightarrow C$ est surjective.
3. On suppose que $g \circ f : A \longrightarrow C$ est surjective c'est-à-dire :
   $$\forall y \in C,\ \exists x \in A,\ y = (g \circ f)(x)$$

Ainsi, on peut écrire que :

$$\forall y \in C,\ \exists x \in A,\ y = g(f(x))$$

Or $f(x) \in B$ (vu que $f : A \longrightarrow B$) et en le notant $z$, on a ainsi :

$$\forall y \in C,\ \exists z \in B,\ y = g(z)$$

soit $g$ surjective.

4. Supposons que $g \circ f$ soit surjective et supposons que $f(x_1) = f(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in A$.
   En composant cette dernière égalité par $g$, on a :

   $$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

   Comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x_1 = x_2$ et donc $f$ est injective.

**★★☆ Exercice 2 : bijections réciproques**

Montrez que les applications suivantes sont bijectives et déterminez leur application réciproque $f^{-1}$ :

1. $f : ]1;+\infty[ \longrightarrow ]3;+\infty[,\ x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x-1}$.
2. $f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\},\ x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ (on pourra calculer $f \circ f$).

1. On résout l'équation, pour $x > 1$ et $y > 3$, $y = f(x)$ :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{3x+1}{x-1} \\ &\iff y(x-1) = 3x+1 \\ &\iff x(y-3) = y+1 \\ &\iff x = \frac{y+1}{y-3} \end{aligned}$$

   La résolution donnant une unique solution nous indique que $f$ est bijective et que $f^{-1} : ]3;+\infty[ \longrightarrow ]1;+\infty[$ est définie par :

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-3}$$

2. On calcule $f \circ f(x)$ ce qui nous donne pour $x \neq -1$ :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \\ &= \frac{1 - \dfrac{1-x}{1+x}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{1+x-(1-x)}{1+x+1-x} \\ &= \frac{2x}{2} = x \end{aligned}$$

   On a donc montré que $f \circ f = Id$ ce qui nous permet de conclure que $f$ est bijective et $f^{-1} = f$.