

Bouchaïb Radi  
Abdelkhalak El Hami

MP  
MP\*

# Maths

Cours, exercices  
et problèmes de synthèse corrigés

**NOUVEAUX  
PROGRAMMES**



ellipses

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Structures algébriques usuelles</b>	<b>1</b>
1.1	Compléments sur les groupes . . . . .	1
1.2	Compléments sur les anneaux . . . . .	2
1.3	Idéaux de $\mathbb{Z}$ . . . . .	2
1.4	Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	2
1.5	Anneaux $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	4
1.6	Algèbres . . . . .	4
1.7	Exercices résolus . . . . .	5
1.8	Problèmes résolus . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Réduction des endomorphismes et des matrices carrées</b>	<b>23</b>
2.1	Compléments d'algèbre linéaire . . . . .	23
2.2	Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée . . . . .	24
2.3	Polynôme caractéristique . . . . .	24
2.4	Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables . . . . .	25
2.5	Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables . . . . .	25
2.6	Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes . . . . .	26
2.7	Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée . . . . .	26
2.8	Lemme de décomposition des noyaux . . . . .	26
2.9	Polynômes annulateurs et réduction . . . . .	27
2.10	Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques . . . . .	27
2.11	Exercices résolus . . . . .	27
2.12	Problèmes résolus . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Endomorphismes d'un espace euclidien</b>	<b>49</b>
3.1	Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	49
3.2	Matrices orthogonales . . . . .	50
3.3	Isométries vectorielles d'un espace euclidien . . . . .	50
3.4	Isométries vectorielles en dimension 2 . . . . .	51
3.5	Réduction des isométries . . . . .	52

3.6	Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien . . . . .	52
3.7	Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs . . . . .	53
3.8	Exercices résolus . . . . .	53
3.9	Problèmes résolus . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Topologie des espaces normés</b>	<b>75</b>
4.1	Normes et espaces vectoriels normés . . . . .	75
4.2	Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé . . . . .	77
4.3	Comparaison des normes . . . . .	78
4.4	Topologie d'un espace normé . . . . .	78
4.5	Étude locale d'une application, continuité . . . . .	79
4.6	Applications linéaires et multilinéaires continues . . . . .	81
4.7	Parties compactes d'un espace normé . . . . .	82
4.8	Applications continues sur une partie compacte . . . . .	82
4.9	Connexité par arcs . . . . .	83
4.10	Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	83
4.11	Exercices résolus . . . . .	84
4.12	Problèmes résolus . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Séries numériques et vectorielles</b>	<b>111</b>
5.1	Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie . . . . .	111
5.2	Compléments sur les séries numériques . . . . .	112
5.3	Exercices résolus . . . . .	113
5.4	Problèmes résolus . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Suites et séries de fonctions, séries entières</b>	<b>131</b>
6.1	Suites et séries de fonctions . . . . .	131
6.1.1	Convergence simple, convergence uniforme . . . . .	131
6.1.2	Continuité, double limite . . . . .	132
6.1.3	Intégration d'une limite uniforme sur un segment . . . . .	132
6.1.4	Dérivation d'une suite de fonctions . . . . .	133
6.1.5	Séries de fonctions . . . . .	133
6.1.6	Approximation uniforme . . . . .	133
6.2	Séries entières . . . . .	133
6.2.1	Généralités . . . . .	133
6.2.2	Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe . . . . .	135
6.2.3	Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle . . . . .	135
6.2.4	Fonctions développables en série entière, développements usuels . . . . .	135
6.3	Exercices résolus . . . . .	136

6.4	Problèmes résolus . . . . .	163
<b>7</b>	<b>Fonctions vectorielles</b>	<b>167</b>
7.1	Dérivabilité en un point . . . . .	167
7.2	Opérations sur les fonctions dérivables . . . . .	168
7.3	Intégration sur un segment . . . . .	169
7.4	Intégrale fonction de sa borne supérieure . . . . .	170
7.5	Formules de Taylor . . . . .	170
7.6	Exercices résolus . . . . .	171
7.7	Problèmes résolus . . . . .	188
<b>8</b>	<b>Intégration sur un intervalle quelconque</b>	<b>191</b>
8.1	Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ . . . . .	191
8.2	Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ . . . . .	192
8.3	Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque . . . . .	192
8.4	Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables . . . . .	193
8.5	Intégration des relations de comparaison . . . . .	194
8.6	Convergence dominée . . . . .	194
8.7	Intégration terme à terme . . . . .	195
8.8	Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre . . . . .	196
8.9	Exercices résolus . . . . .	197
8.10	Problèmes résolus . . . . .	211
<b>9</b>	<b>Variables aléatoires discrètes</b>	<b>215</b>
9.1	Ensembles dénombrables . . . . .	215
9.2	Espaces probabilisés . . . . .	215
9.3	Probabilités conditionnelles et indépendance . . . . .	216
9.4	Espaces probabilisés discrets . . . . .	217
9.5	Variables aléatoires discrètes . . . . .	217
9.6	Variables aléatoires indépendantes . . . . .	218
9.7	Lois usuelles . . . . .	218
9.8	Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe . . . . .	219
9.9	Variance d'une variable aléatoire, écart type et covariance . . . . .	220
9.10	Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres . . . . .	221
9.11	Fonctions génératrices . . . . .	221
9.12	Exercices résolus . . . . .	222
9.13	Problèmes résolus . . . . .	242
<b>10</b>	<b>Équations différentielles linéaires</b>	<b>249</b>
10.1	Généralités . . . . .	249
10.2	Solutions d'une équation différentielle linéaire . . . . .	250

10.3	Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice . . . . .	250
10.4	Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants . . . . .	251
10.5	Variation des constantes . . . . .	252
10.6	Exercices résolus . . . . .	252
10.7	Problèmes résolus . . . . .	276
<b>11</b>	<b>Calcul différentiel et optimisation</b>	<b>283</b>
11.1	Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles . . . . .	283
11.2	Différentielle . . . . .	283
11.3	Opérations sur les applications différentiables . . . . .	285
11.4	Applications de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	285
11.5	Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie . . . . .	286
11.6	Optimisation : étude au premier ordre . . . . .	286
11.7	Applications de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	287
11.8	Optimisation : étude au second ordre . . . . .	288
11.9	Exercices résolus . . . . .	289
11.10	Problèmes résolus . . . . .	300
<b>12</b>	<b>Problèmes de synthèse</b>	<b>305</b>
12.1	Structures algébriques usuelles . . . . .	305
12.2	Fonctions vectorielles . . . . .	314
12.3	Intégration sur un intervalle quelconque . . . . .	317
12.4	Endomorphismes d'un espace euclidien . . . . .	351
12.5	Séries entières . . . . .	363
12.6	Topologie des espaces normés . . . . .	371
12.7	Variables aléatoires discrètes . . . . .	379
12.8	Réduction des endomorphismes . . . . .	393
12.9	Suites et séries de fonctions . . . . .	433
	<b>Index</b>	<b>439</b>