Bouchaïb Radi
Abdelkhalak El Hami

CPGE scientifiques
1ère et 2e années

Aide-mémoire de maths

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

Chapitre 1

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

1.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Généralités sur les fonctions

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sera dite fonction réelle d'une variable réelle. Pour toute fonction réelle d'une variable réelle, il existe un plus grand sous ensemble unique $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$, tel que f est une application de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ est appelé ensemble de définition de f. Par exemple, pour $f(x) = \sqrt{x}$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

L'ensemble de tous les couples $(x, f(x))$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ est appelé graphe de f et il est désigné par $\mathcal{C}_f$ (figure 1.1).

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \text{ tels que } x \in \mathcal{D}_f\}.$$

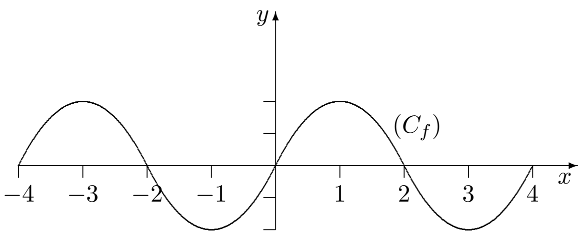

FIG. 1.1 – *Représentation graphique d'une fonction f*

Définition On dit que f est paire si

1. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $-x \in \mathcal{D}_f$
2. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = f(x)$.

Définition On dit que f est impaire si

1. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $-x \in \mathcal{D}_f$
2. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = -f(x)$.

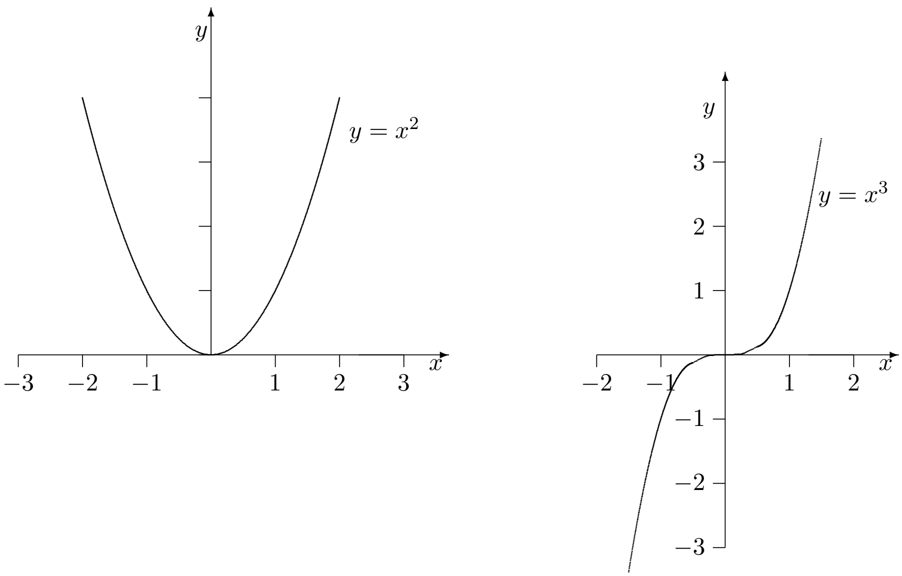

FIG. 1.2 – *Fonctions paire et impaire*

Application : La fonction réelle définie par $f(x) = x^2$ est paire, et la fonction réelle définie par $f(x) = x^3$ est impaire (figure 1.2).

Définition On dit que f est périodique de période $T \in \mathbb{R}^*$, si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

1. $\forall x \in D_f,\ x + T \in D_f$,
2. $\forall x \in D_f,\ f(x+T) = f(x)$.

Application : Les fonctions réelles définies par $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ sont périodiques de période 2π.

Théorème (Opérations sur les fonctions) Soient f et g deux fonctions réelles.

- Addition : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- Multiplication : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (fg)(x) = f(x) \times g(x)$;
- Composition : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Définition (Monotonie) Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur une partie I de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est croissante sur I si pour tous $x, x' \in I$, on a
$$x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x').$$
2. On dit que f est strictement croissante sur I si pour tous $x, x' \in I$, on a
$$x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x').$$

3. On dit que f est décroissante sur I si pour tous $x,x' \in I$, on a
$$x \leq x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x').$$
4. On dit que f est strictement décroissante sur I si pour tous $x,x' \in I$, on a
$$x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x').$$
5. On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I ou elle est décroissante sur I.

Application : La fonction $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.

Définition (Fonction majorée, minorée, bornée) Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur une partie I de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est majorée sur I si l'ensemble $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est majoré.
2. On dit que f est minorée sur I si l'ensemble $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est minoré.
3. On dit que f est bornée sur I si l'ensemble $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est borné.

Applications
1. Les fonctions réelles f et g définies respectivement par $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$, sont majorées sur $\mathbb{R}$ par 1, minorées sur $\mathbb{R}$ par -1 et bornées sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction réelle définie par $f(x) = \exp(x)$, est non majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$ et non bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition Soient f une fonction réelle définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. On dit que f présente un maximum en a si $f(x) \leq f(a)$, pour tout $x \in I - \{a\}$,
2. On dit que f présente un maximum strict en a si
$f(x) < f(a)$, pour tout $x \in I$,
3. On dit que f présente un minimum en a si $f(x) \geq f(a)$, pour tout $x \in I - \{a\}$,
4. On dit que f présente un minimum strict en a si
$f(x) > f(a)$, pour tout $x \in I$.

Dans la figure (1.3), la fonction f définie sur l'intervalle $[a,b]$ par sa représentation graphique, présente un maximum en x_1 et un minimum en x_2.

Une fonction f est bornée si et seulement si $\mid f \mid$ est majorée.

Dérivation

Définition Soient f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle ouvert I et a un nombre réel appartenant à I. On dit que f est dérivable au point a si la limite
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
existe et est finie. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée dérivée de f en a et est notée $f'(a)$.

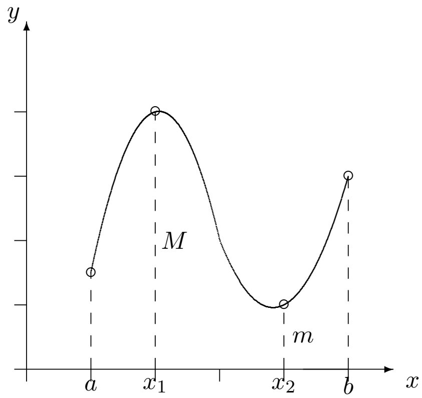

FIG. 1.3 – *Un minimum en x_2 et un maximum en x_1*

Définition Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $a \in I$. L'application

$$f'\colon x \to f'(x),$$

est appelée fonction dérivée de f.

Définition (Equation de la tangente) Soient a un nombre réel, f une fonction réelle d'une variable réelle, dérivable au point a et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f par rapport à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point a. s'écrit :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Applications

1. Pour $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$, on a $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$.
2. Pour $f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, on a $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$.
3. Pour $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$, on a $f'(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = -\sin(x)$.
4. Pour $f\colon x \to \ln x$ et $g\colon x \to \exp(x)$, on a $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g'(x) = \exp(x)$.

Propriétés des fonctions dérivables

Soient a un nombre réel, f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle ouvert I contenant a et dérivables en a et soit λ un nombre réel. Alors

1. $f+g, fg$ et λf sont dérivables en a et l'on a

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a),\\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a),\\ (\lambda f)'(a) &= \lambda f'(a).\end{aligned}$$

2. Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et l'on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Soient I et J deux intervalles réels, f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur J. On suppose que $f(I) subset J$. Alors, $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'.$$

Pour une fonction réelle f d'une variable réelle dérivable définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on a

1. Pour que f soit croissante (resp. strictement croissante) sur I, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0 \,(\text{resp. } f'(x) > 0).$$

2. Pour que f soit décroissante (resp. strictement décroissante) sur I, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0 \quad (\text{resp. } f'(x) < 0).$$

Corollaire 1.1 *Soit f une fonction réelle d'une variable réelle dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. f est constante sur I.

2. $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Définition (Tableau de variation) Etudier le sens de variation d'une variation d'une fonction numérique f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ c'est partager, lorsque c'est possible, D en un nombre fini d'intervalles tels que sur chacun d'eux f soit : ou bien constante, ou bien strictement croissante, ou bien strictement décroissante.
On indique ce sens de variation dans un tableau appelé tableau de variation.

Graphe d'une réciproque

Soit f une bijection continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Le graphe de la fonction réciproque f^{-1} est obtenu par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).

Dérivée d'une réciproque

Soient f une bijection continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Si la fonction f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable en $b = f(a)$ et l'on a

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)}$$

Définition (Dérivées successives) Soit f une fonction réelle dérivable sur I. Si la fonction dérivée
$$f' : x \to f'(x),$$
de I dans $\mathbb{R}$, est dérivable sur I, la fonction dérivée de f' sera appelée dérivée seconde de f en a et est notée $f''(a)$. Par récurrence, on définit la dérivée $f^{(p+1)}(a)$ d'ordre $p+1$ de f en a, c'est la dérivée (si elle existe) de l'application $f^{(p)} : x \to f^{(p)}(x)$.

Fonctions usuelles

Définition (Logarithme népérien,) On appelle logarithme népérien, la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Propriétés du logarithme népérien

- La fonction ln vérifie les propriétés suivantes :
$$\ln(1) = 0, \ \ \ln(ab) = \ln a + \ln b, \ \ \ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b), \ \ln(a^r) = r\ln(a),$$
pour tous $a,b \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}$.
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \ y'(x) = \frac{1}{x}.$$
- La fonction logarithme népérien est strictement croissante, non majorée ($\ln 2^n = n\ln 2$) et non minorée, donc,
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$
- Les limites classiques liées à la fonction logarithme sont :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \ \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \ \ \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.$$
- La fonction logarithme népérien est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$; en particulier il existe un nombre réel unique e (qui est irrationnel), tel que $\ln e = 1$, avec une incertitude égale à 5.10^{-6}, $e = 2{,}71828$.

Définition (Exponentielle) La bijection réciproque de la fonction logarithme, est notée $x \longmapsto \exp x$. En fait, on a, $\exp x = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriétés de la fonction exponentielle

- La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$ et satisfait aux propriétés suivantes :
$$\exp(\ln a) = a \quad (a > 0), \ln(\exp x) = x\,(x \in \mathbb{R}), \exp(0) = 1,$$
$$\exp(a+b) = \exp a \exp b, \ (\exp a)^b = \exp(ab), \quad (a,b \in \mathbb{R}).$$

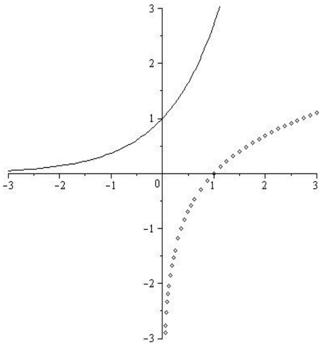

FIG. 1.4 – *Fonctions logarithme et exponentielle*

- Les limites classiques liées à la fonction exponentielle sont :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty \ , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} x \exp x = 0.$$

- La fonction exponentielle est une bijection croissante, continue, dérivable et on a d'après la règle du calcul de la dérivée d'une fonction réciproque :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \ y' = \frac{1}{f'(\exp x)} = \exp x,$$

où $f(x) = \ln x$.

Définition (Fonction puissance) Soit α un réel. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \quad x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).$$

Dérivée de la fonction puissance

Soient α un réel et $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$. La fonction f est dérivable et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Régles de calcul sur les puissances

Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ • $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$ • $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$

Croissances comparées des différentes fonctions

Soient
$\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors

- $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$ • $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$ • $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Définition (Fonctions sinus, cosinus, tangente) • La fonction sinus notée sin est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, et est impaire.

- La fonction cosinus notée cos est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, et est paire.
- La fonction tangente notée tan définie sur $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, périodique de période π, et est impaire.

Propriétés de la fonction sin

- La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est : $\sin'(x) = \cos(x)$.
- La restriction de cette fonction à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ définit une bijection continue de cet intervalle sur $[-1,1]$; sa dérivée ne s'annule qu'aux points $\pm\pi/2$, d'images respectives ± 1.
- On a $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Propriétés de la fonction cos

- La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est : $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- La restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0,\pi]$ définit une bijection continue de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Sur cet intervalle, la fonction dérivée ne s'annule qu'aux points 0 et π, d'images respectives 1 est -1.
- On a $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Propriétés de la fonction tangente

- la fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$, sa dérivée est $\tan' x = 1 + \tan^2 x$.
- La restriction de cette fonction à $]-\pi/2, \pi/2[$ définit une bijection continue de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. On a $\lim_{x\to 0+} \frac{\tan x}{x} = 1$.

Définition (Fonctions circulaires réciproques) • La fonction réciproque de la fonction sin, notée $\operatorname{Arcsin} x$, est une bijection continue de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$(y = \operatorname{Arcsin}(x),\ -1 \le x \le 1) \Leftrightarrow (x = \sin(y)\ ,\ -\pi/2 \le y \le \pi/2)\,.$$

- La fonction réciproque de la fonction cos, notée Arccos, est une bijection continue de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$:

$$(y = \operatorname{Arccos}(x),\ -1 \le x \le 1) \Leftrightarrow (x = \cos(y), 0 \le y \le \pi)\,.$$