LYCÉE

Stéphane Daniel

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

FORMULAIRE MATHS

- **Seconde**
- **Première**
  Spécialité + tronc commun
- **Terminale**
  Spécialité + options maths complémentaires et expertes

Les 3 années
en 1 clin d'œil

ellipses

Arithmétique ! Algèbre ! Géométrie !
Trinité grandiose ! Triangle lumineux !
Celui qui ne vous a pas connues est un insensé !

Lautréamont

Nombres et calculs

Les nombres réels

Chiffres

Les **chiffres** sont les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Ils permettent d'écrire tous les nombres.

Les chiffres sont pour les nombres, ce que les lettres de l'alphabet sont pour les mots.

Ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;\ldots;1\,000\,;\ldots\}$
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$: **ensemble des entiers naturels** non nuls.

Ensemble des entiers relatifs

Noté $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;\ -1\,000\,;\ \ldots\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;1\,;2\,;\ \ldots\,;1\,000\,;\ldots\}$
$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$: **ensemble des entiers relatifs** non nuls.

Ensemble des nombres décimaux

Noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$: **ensemble des nombres décimaux** non nuls.

Tout nombre décimal positif x peut s'écrire avec une virgule sous la forme a, b où a et b sont des entiers naturels.

a est la **partie entière** et b la **partie décimale** de x.

Ajouter un ou des zéros, avant ou après un développement décimal ne modifie pas sa valeur.

Exemple : $x = \frac{273}{10^2} = 2{,}73 = 002{,}730$, 2 est la partie entière de x et 73 sa partie décimale.

Ensemble des nombres rationnels

> Noté $\mathbb{Q}$, c'est l'ensemble des **fractions** $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. a est le **numérateur** et b le **dénominateur**.
> $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$: **ensemble des nombres rationnels** non nuls.

Tout nombre rationnel positif x peut s'écrire avec une virgule sous la forme a, b avec a entier naturel et b une suite de chiffres qui se répètent à partir d'un certain rang.

> a est la **partie entière** et b la **partie décimale** de x.

Fraction irréductible

> Soit a et b deux entiers relatifs, $b \neq 0$. La **fraction** $\frac{a}{b}$ est **irréductible** si 1 est l'unique diviseur positif commun à a et b.

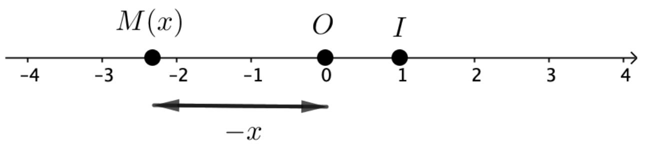
Toute fraction non nulle est égale à une unique fraction irréductible.

Droite numérique

> Étant donnée une droite Δ et deux points distinctes O et I sur cette droite. Le couple $(O\,;I)$ constitue un repère sur Δ. O est l'origine du repère et OI son unité. La droite Δ munie du repère $(O\,;I)$ est appelée **axe gradué** ou **droite numérique**.

Abscisse d'un point sur un axe gradué

> Étant donné un axe gradué de repère $(O\,;I)$ et M un point de cette droite. Si $M \in [OI)$, il existe un unique nombre positif x tel que $OM = x \times OI$. Sinon il existe un unique nombre négatif x tel que $OM = -x \times OI$. Dans tous les cas, x est appelé **abscisse** de M, dans le repère $(O\,;\,I)$, et on note $M(x)$.



En particulier, $O(0)$ et $I(1)$.

Nombres réels

Étant donné un axe gradué et M, un point de cet axe, d'abscisse x. On dit que x est un **nombre réel**, l'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$: ensemble des nombres réels non nuls.

À tout nombre réel correspond un unique point de l'axe gradué.

Inclusion d'ensembles

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux ensembles, on dit que $\mathcal{E}$ est **inclus** dans $\mathcal{F}$, et on note $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, si tous les éléments de $\mathcal{E}$ appartiennent à $\mathcal{F}$.

Par exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Nombres irrationnels

Un **nombre irrationnel** est un nombre réel non rationnel.

$\sqrt{2}$ et π sont des nombres irrationnels.

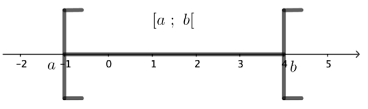
Intervalles

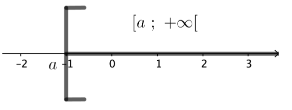
Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Un intervalle est un ensemble de nombres réels x défini par des bornes. Ci-après, les notations avec leurs interprétations à l'aide de crochets.

	Inégalités	**Intervalles**
Intervalles bornés	$a \leq x \leq b$	$[a\,;b]$ Intervalle fermé
	$a < x \leq b$	$]a\,;b]$ Intervalle ouvert à gauche et fermé à droite
	$a \leq x < b$	$[a\,;b[$ Intervalle fermé à gauche et ouvert à droite

	$a < x < b$	$]a\,;b[$ Intervalle ouvert
Intervalles non bornés	$x \geq a$	$[a\,;\,+\infty[$ Intervalle fermé
	$x > a$	$]a\,;\,+\infty[$ Intervalle ouvert
	$x \leq a$	$]-\infty\,;a]$ Intervalle fermé
	$x < a$	$]-\infty\,;a[$ Intervalle ouvert

a et b sont les bornes des intervalles.
Ci-après les représentations graphiques de deux intervalles.





Intervalles particuliers

$\mathbb{R}^+ = [0\,;\,+\infty[\,;\,\mathbb{R}^*_+ =]0\,;\,+\infty[$
$\mathbb{R}^- =]-\infty\,;0]\,;\,\mathbb{R}^*_- =]-\infty\,;0[$

Approximations

Soit x un nombre réel et n et un entier naturel, il existe un unique nombre décimal d ayant une partie décimale d'au plus n chiffres tel que :

$$\boxed{d \leq x < d + 10^{-n}}$$

On dit que d est la valeur approchée de x à 10^{-n} près par défaut et $d + 10^{-n}$ la **valeur approchée** de x à 10^{-n} près par excès.

L'intervalle $[d\,;d + 10^{-n}[$ a pour amplitude 10^{-n}.

Supposons que d possède une partie décimale ayant exactement n chiffres. Si x est plus proche de d que de $d + 10^{-n}$, on dira que d est la **valeur approchée** de x à 10^{-n} près, sinon on prendra $d + 10^{-n}$. Si les distances sont identiques, on prendra d pour valeur approchée à 10^{-n} près.

Exemple : $1{,}414 \leq \sqrt{2} < 1{,}415$, $1{,}414$ est la valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par défaut et $1{,}415$ la valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par excés. $1{,}4142$ est la valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près par défaut, donc $\sqrt{2}$ est plus proche de $1{,}414$ que de $1{,}415$, donc la valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près est $1{,}414$.

Valeur absolue

Soit x un nombre réel, on appelle **valeur absolue** de x, le nombre réel noté $|x|$ tel que :

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}}$$

Pour tous les nombres réels x, $|x| \geq 0$.

Distance entre nombres réels

Étant donnés deux nombres réels x et y, la distance entre x et y est le nombre $|x - y|$.

Intervalles et valeur absolue

Soit a et r deux nombres réels avec $r > 0$, un nombre réel x appartient à l'intervalle $[a - r\,; a + r]$ (resp. $]a - r\,; a + r[$) si, et seulement si, $|x - a| \leq r$ (resp. $|x - a| < r$).

Calcul littéral

Expression littérale et variables

Une **expression littérale** est une liste de nombres et de lettres liés entre eux par des opérations algébriques ou des fonctions. Les lettres sont appelées **variables**.

Développer ou factoriser

Développer une expression littérale, c'est transformer un produit de facteurs en une somme de termes. **Factoriser** une expression littérale, c'est transformer une somme de termes en produit de facteurs.

Distributivité

Soit a et b deux nombres réels, ab est la notation du produit $a \times b$.

Soit a, b, c et d quatre nombres réels.

- **Distributivité** :

$$\boxed{a(b+c) = ab + ac}$$

- Formule de la **double distributivité** :

$$\boxed{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$$

Le passage du membre de gauche à celui de droite est un développement, l'opération inverse est une **factorisation**.

Identités remarquables

Soit a et b deux nombres réels.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Identité est synonyme d'égalité.

Calculs avec des quotients

Soit a, b, c et d quatre nombres réels avec b et d non nuls.

- $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$;
- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$;
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$;
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$;
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;
- Si $c \neq 0$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Puissances entières

Soit a un nombre réel non nul et n un entier relatif.

- Si $n \geq 2$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois le nombre } a}$
- Si $n < 0$, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

L'écriture « 0^0 » n'est pas définie, elle n'existe pas.
Soit a et b deux nombres réels non nuls, et soit m et n deux entiers relatifs.

- $a^m a^n = a^{m+n}$;
- $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$;
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
- $(a^m)^n = a^{mn}$;
- $(ab)^n = a^n a^n$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Racine carrée

Soit a un nombre réel positif, on appelle **racine carrée** de a le nombre réel positif noté $\sqrt{a}$, solution de l'équation $x^2 = a$.

La racine carrée d'un nombre strictement négatif n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- $\sqrt{a}^2 = a$;
- Si a est un nombre réel quelconque, $\sqrt{a^2} = |a|$.

En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, en fait $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ avec égalité si, et seulement si, a ou b est nul, c'est l'inégalité triangulaire.

Inégalités et opérations

Soit a, b, c et d quatre nombres réels.

- $(a < b) \Leftrightarrow (a + c < b + c)$;
- $(a < b \text{ et } c < d) \Longrightarrow (a + c < b + d)$;
- $(a < b \text{ et } c \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} ac < bc \text{ et } \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ si } c > 0 \\ ac > bc \text{ et } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ si } c < 0 \end{cases}$;
- $(0 \leq a < b \text{ et } 0 \leq c < d) \Longrightarrow (ac < bd)$.