

Apprendre
à raisonner

MATHS

5^e

Mathieu Kieffer



ellipses

Nombres relatifs

Présentation

1.1 Introduction

Remarque. Certaines grandeurs peuvent être orientées dans deux sens différents.

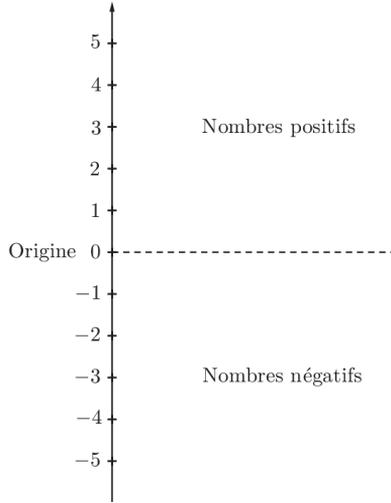
Exemple. Voici deux exemples de grandeurs orientées :

1. Pour repérer des températures, il est nécessaire de fixer une température de référence. Ainsi, sur l'échelle Celsius, c'est celle de la fusion de la glace qui a été choisie. C'est pour cela qu'on dit que la glace fond à 0 degré Celsius, noté 0°C . Les températures supérieures à cette température-là se repèrent à l'aide d'un nombre que l'on fait parfois précéder d'un signe « + ». Les températures inférieures à la température de fusion de la glace, c'est-à-dire à 0°C , doivent être distinguées des précédentes par l'emploi d'un signe, le signe « - ». On parle alors sans ambiguïté d'une température égale à -18°C , c'est-à-dire de 18 degrés Celsius au-dessous de zéro.
2. Les altitudes sont elles aussi repérées par rapport à un certain niveau fixé en guise de référence, à savoir celui des océans. Par exemple, lorsque l'on affirme que le Grand Ballon culmine à 1 424 mètres d'altitude, cela signifie que son sommet se situe 1 424 mètres au-dessus du niveau des océans. À l'opposé, le niveau de la mer Morte est à une altitude de -395 m , c'est-à-dire 395 mètres au-dessous du niveau des océans.

1.2 Présentation

Définition 1. Un zéro (ou une origine) étant choisi, on appelle nombre positif tout nombre supérieur ou égal à zéro. On appelle nombre négatif tout nombre inférieur ou égal à 0. Un nombre positif est précédé du signe +. Un nombre négatif est précédé du signe -.

Illustration :



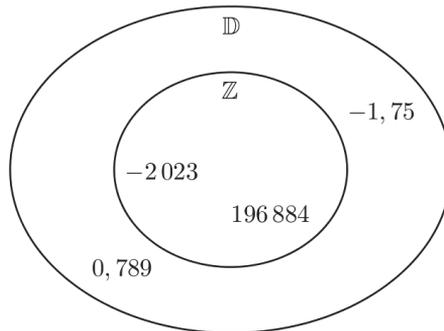
Remarque. Au regard de cette définition, il existe un unique nombre à la fois positif et négatif : 0. Par ailleurs, dans un souci d'alléger au maximum les écritures algébriques, le signe « + » est souvent omis devant un nombre positif.

Exemple. +19,81, qui s'écrit tout simplement 19,81, est un nombre positif car $19,81 \geq 0$ et $-2,17$ est un nombre négatif car $-2,17 \leq 0$.

Définition 2. La réunion de l'ensemble des nombres ENTIERS positifs et de l'ensemble des nombres ENTIERS négatifs est appelée l'ensemble des nombres entiers relatifs. Il est noté \mathbb{Z} .

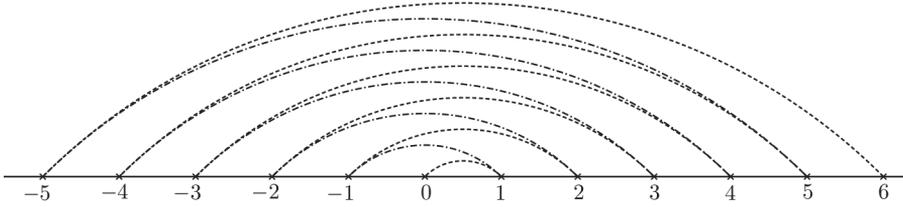
Exemple. 9 et -17 sont des nombres entiers relatifs et donc également des nombres relatifs. 89,5 est un nombre décimal relatif mais n'est pas un nombre entier relatif. $-64,17$ est un nombre décimal relatif mais n'est pas un nombre entier relatif.

Illustration : voici un diagramme de Venn¹ synthétisant la définition 2 :



1. John Venn est un mathématicien et logicien britannique né en 1834 et mort en 1923.

Remarque. Cela peut paraître a priori surprenant mais il y a autant de nombres entiers naturels que de nombres entiers relatifs comme l'illustre le dénombrement suivant :



Définition 3. On appelle valeur absolue ou distance à zéro d'un nombre relatif ce nombre dépourvu de son signe.

Exemple. 39,7 a pour valeur absolue 39,7. $-26,81$ a pour valeur absolue 26,81.

Notation : la valeur absolue de x se note $|x|$. Ainsi, $|-7,3| = 7,3$ et $|900,1| = 900,1$.

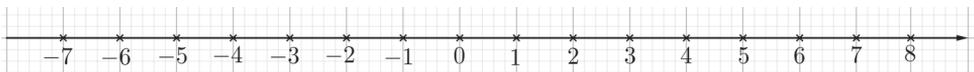
Définition 4. Deux nombres relatifs sont dits égaux s'ils ont le même signe et la même valeur absolue. Deux nombres relatifs sont dits opposés s'ils sont de signe contraire et ont la même valeur absolue.

Exemple. 3,2 et $-3,2$ sont des nombres opposés.

1.3 Repérage d'un point sur une droite

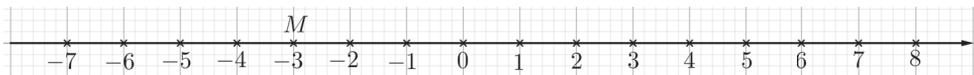
Définition 5. On appelle axe toute droite sur laquelle on a choisi une origine, une unité et une orientation (i.e. un sens de parcours).

Illustration :



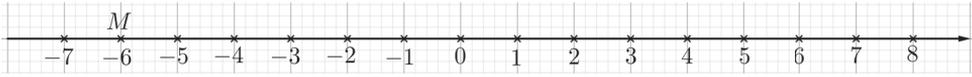
Remarque. À tout nombre relatif x correspond un unique point M de l'axe et réciproquement, à tout point M de l'axe correspond un unique nombre relatif. Cette correspondance biunivoque permet le repérage d'un point sur un axe.

Exemple. Sur la droite graduée ci-dessous, le point M est repéré par le nombre -3 .



Définition 6. Soit M un point d'un axe. Le nombre relatif x correspondant à M et permettant de le repérer sur l'axe est appelé l'abscisse du point M . On note $M(x)$ ou encore $\overline{OM} = x$ où O désigne l'origine de l'axe.

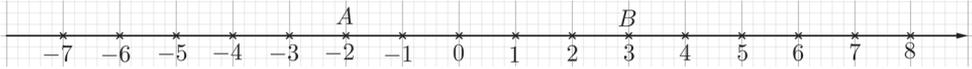
Exemple. Sur l'axe ci-dessous, le point M a pour abscisse -6 . On note : $M(-6)$.



Remarque. C'est parce qu'un seul nombre suffit à savoir où se situe un point sur une droite que l'on dit que la droite est un objet géométrique de dimension 1.

Définition 7. Soient A et B deux points d'un axe. On appelle mesure algébrique du segment $[AB]$, notée \overline{AB} , l'abscisse de B lorsque l'on prend A comme origine de l'axe.

Exemple. Sur l'axe ci-dessous, on a : $\overline{AB} = 5$.



Remarque. La mesure algébrique \overline{AB} est positive si, en parcourant le segment de A vers B , on se déplace dans le sens positif défini par l'axe, et négative si, en parcourant le segment de A vers B , on se déplace dans le sens négatif défini par l'axe.

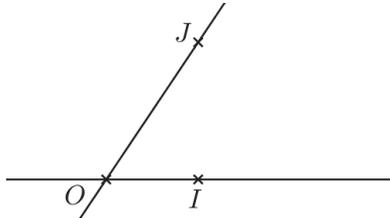
Proposition 8. \overline{AB} et \overline{BA} sont deux nombres opposés.

Démonstration. Découle de la définition de deux nombres opposés et de la remarque précédente. □

1.4 Repérage d'un point dans le plan

Définition 9. On appelle repère du plan la donnée de trois points O , I et J non alignés. On le note $(O; I, J)$.

Illustration :

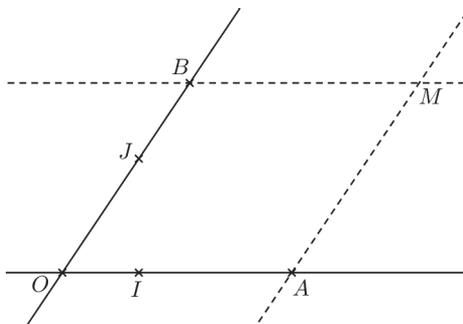


Vocabulaire :

- O est appelé l'origine du repère.
- La droite (OI) orientée de O vers I est appelée l'axe des abscisses du repère. La longueur OI est l'unité sur cet axe.
- La droite (OJ) orientée de O vers J est appelée l'axe des ordonnées du repère. La longueur OJ est l'unité sur cet axe.
- Si $(OI) \perp (OJ)$, alors le repère $(O; I, J)$ est dit orthogonal.
- Si $OI = OJ$, alors le repère $(O; I, J)$ est dit normé.
- Un repère orthogonal et normé est dit orthonormé.

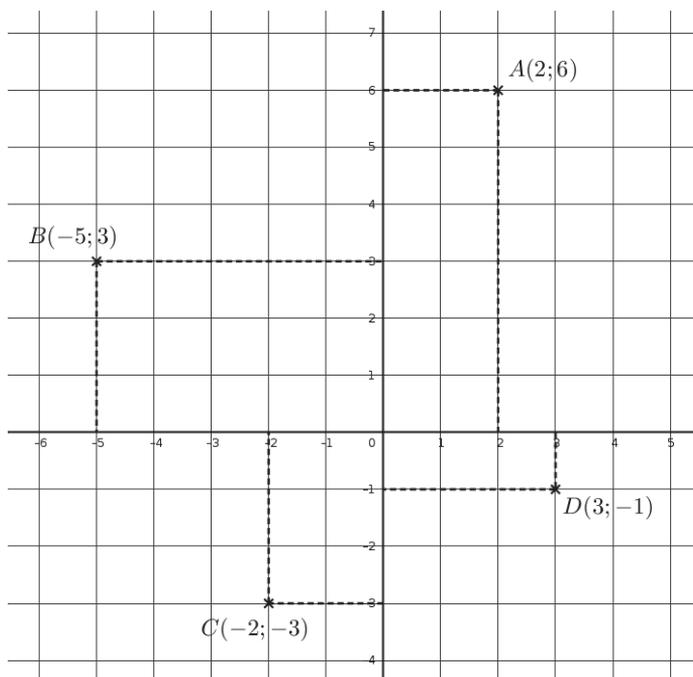
Définition 10. Soit $(O; I, J)$. un repère du plan. Soit M un point du plan. La parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en A . La parallèle à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en B . Les nombres relatifs $x = \overline{OA}$ et $y = \overline{OB}$ sont appelés les coordonnées du point M dans le repère $(O; I, J)$. Plus précisément, x est appelé l'abscisse de M et y est appelé l'ordonnée de M . On note $M(x; y)$.

Illustration :



Remarque. À tout couple de nombres relatifs $(x; y)$ correspond un unique point M du plan et, réciproquement, à tout point M du plan correspond un unique couple de nombre relatifs $(x; y)$. Cette correspondance biunivoque permet le repérage d'un point dans le plan.

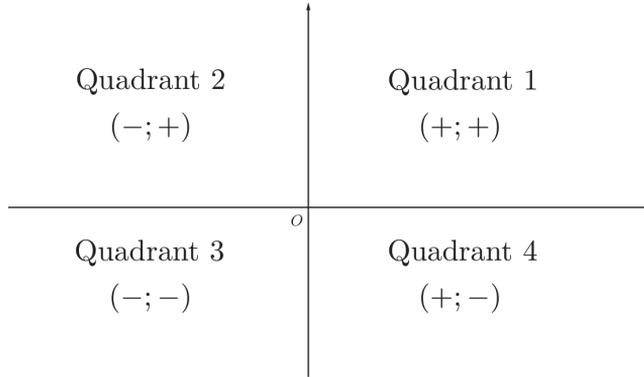
Exemple. Dans le repère du plan ci-dessous, nous pouvons lire les coordonnées des points A , B , C et D :



Chapitre 1

Remarque. Nous pouvons effectuer trois remarques :

1. Un repère du plan créé *de facto* quatre régions du plan appelées quadrants. Ces quadrants possèdent chacun une « signature » qui n'est rien d'autre que le couple constitué des signes des coordonnées des points appartenant à ce quadrant :



2. La symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses conserve le signe de l'abscisse mais modifie celui de l'ordonnée.
3. La symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées conserve le signe de l'ordonnée mais modifie celui de l'abscisse.
4. C'est parce que deux nombres suffisent à savoir où se situe un point dans le plan que l'on dit que le plan est un objet géométrique de dimension 2.

1.5 Exercices

Exercice 1

1. Parmi les cinq nombres suivants, quel est le plus petit qui est strictement supérieur à $-5,9$?

$-5,8$ $-5,89$ $-5,9$ $-5,91$ -6

2. Un nombre à virgule comporte deux chiffres après la virgule. Il est strictement supérieur à $-2,333$ et strictement inférieur à $-2,323$. Qui est-il ?
3. Quel est le plus petit nombre décimal relatif écrit avec trois chiffres différents ?
4. Quel est le plus grand nombre décimal relatif écrit avec trois chiffres différents ?
5. Quel est le plus petit nombre décimal strictement compris entre 0 et -1 , et écrit avec trois chiffres différents ?

Exercice 2

Clément vient d'entrer dans un immeuble de vingt étages, avec cinq niveaux de sous-sol. L'ascenseur de cet immeuble est un peu étrange, il ne possède que deux boutons :

- Le bouton A, qui le fait monter de trois étages ;
- Le bouton B, qui le fait descendre de cinq étages.

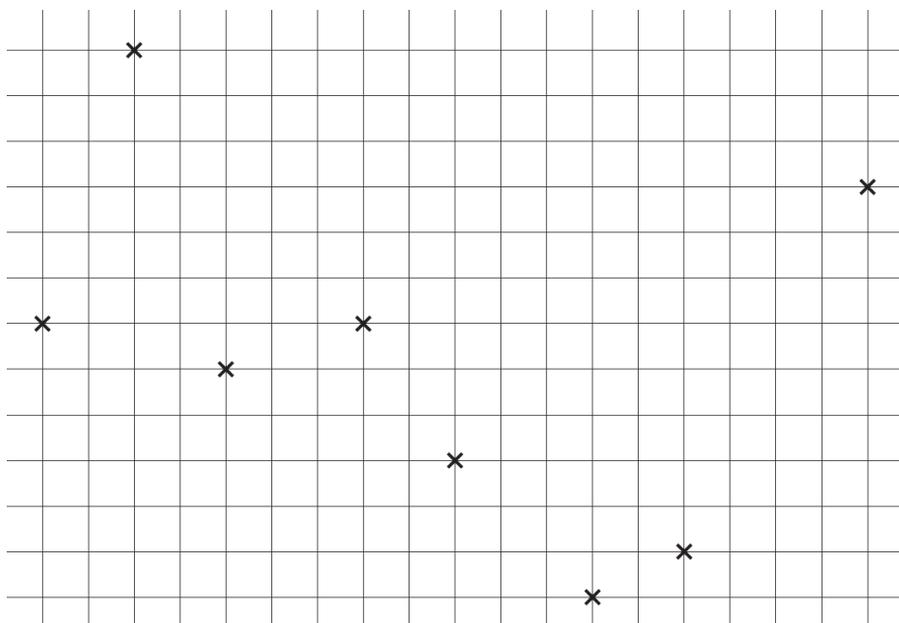
1. Clément, monté au rez-de-chaussée dans l'ascenseur, effectue des pressions successives sur les touches AABB. À quel étage va-t-il s'arrêter ?
2. Si Clément désire, depuis le rez-de-chaussée, atteindre le dix-neuvième étage, quelle suite minimale de pressions sur A et B doit-il faire ?

Exercice 3

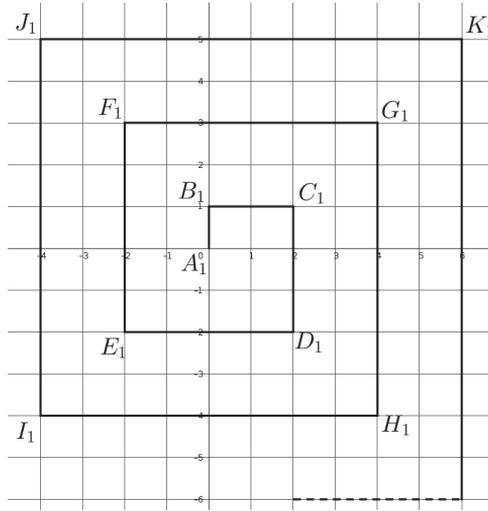
Clément et Emma sont dans le Sahara. Ils partent du même point. Clément fait 1 km vers le Nord, 2 km vers l'Ouest, 4 km vers le Sud et enfin 1 km vers l'Ouest. Emma parcourt quant à elle 1 km vers l'Est, 4 km vers le Sud et 4 km vers l'Ouest. Quelle doit être la dernière partie de son trajet pour rejoindre Clément ?

Exercice 4

Aucun des points ci-dessous n'est situé sur l'un des axes du repère. Cinq d'entre eux ont une ordonnée positive. Quatre d'entre eux ont une abscisse négative. Saurez-vous retrouver le repère du plan ?



Exercice 5



Sachant que A_2 suivra Z_1 , A_3 suivra Z_2 et ainsi de suite, quelles seront les coordonnées du point Z_{100} ?

1.6 Corrigés

Exercice 1

1. Parmi les cinq nombres proposés, le plus petit qui est strictement supérieur à $-5,9$ est $-5,89$.
2. Il s'agit de $-2,33$.
3. Le plus petit nombre décimal relatif écrit avec trois chiffres différents est -987 .
4. Le plus grand nombre décimal relatif écrit avec trois chiffres différents est 987 .
5. Le plus petit nombre décimal strictement compris entre 0 et -1 et écrit avec trois chiffres différents est $-0,98$.

Exercice 2

1. Les deux pressions sur la touche A le font monter à l'étage numéro 6 puis les deux pressions sur le bouton B le font descendre à l'étage numéro -4 .
2. 19 n'est pas un multiple de trois donc la touche A seule ne permettra pas à Clément de se rendre à l'étage numéro 19. Il devra donc appuyer au moins une fois sur le bouton B. Or une telle action est possible. En effet, il lui suffit d'appuyer huit fois sur le bouton A, ce qui l'emmènera à l'étage numéro 24 puis de presser une seule fois le bouton B afin d'aboutir à l'étage numéro 19. La suite minimale est donc : AAAAAAAAAAB.