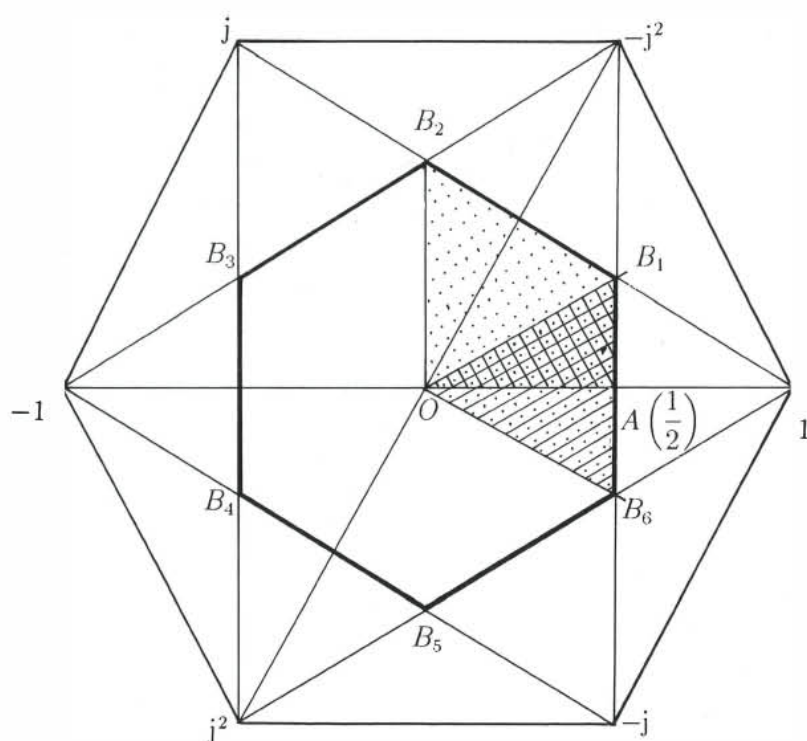


# GROUPES, ALGÈBRES ET GÉOMÉTRIE

Tome 2



Jean-Marie ARNAUDIÈS

José BERTIN



# Table des matières

Notations	X
Chapitre XI. Le produit tensoriel	3
XI.1 Dimension des modules sur un anneau commutatif	4
XI.2 Modules et algèbres : généralités	10
XI.3 Le produit tensoriel	19
XI.4 Propriétés fondamentales du produit tensoriel	29
XI.5 Extension des scalaires dans le cas commutatif	40
Exercices du chapitre XI	49
Chapitre XII. Algèbres tensorielles, extérieures et symétriques	53
XII.1 Algèbres graduées	53
XII.2 Algèbres associatives libres, algèbres universelles	57
XII.3 Algèbres définies par générateurs et relations	67
XII.4 L'algèbre symétrique d'un module	73
XII.5 Actions de $\mathfrak{S}_n$ sur $T^n(M)$ et $ML_n(M; N)$	79
XII.6 Algèbres extérieures	82
XII.7 Calcul matriciel et algèbres extérieures	92
XII.8 Algèbres extérieures des $K$ -ev de dimension finie	97
XII.9 Produit tensoriel d'algèbres	105
XII.10 Algèbres universelles de modules	112
Exercices du chapitre XII	114
Chapitre XIII. Modules de type fini sur un anneau principal, réseaux	121
XIII.1 Sous-modules des $A$ -modules libres	122
XIII.2 Réduction des matrices	125
XIII.3 Les $A$ -modules de type fini	131
XIII.4 Les $A$ -modules de torsion de type fini	136
XIII.5 Composants primaires	139
XIII.6 Application aux endomorphismes d'espaces vectoriels	141
XIII.7 Application aux groupes abéliens	143
XIII.8 Réseaux d'un $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel	146
XIII.9 Réseaux d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel	148
XIII.10 Introduction à l'étude euclidienne des réseaux	158
XIII.11 Notions sur les groupes topologiques	164
XIII.12 Tores	170
Exercices du chapitre XIII	176

Chapitre XIV. Compléments d'algèbre bilinéaire	181
XIV.1 Espaces quadratiques, espaces symplectiques	181
XIV.2 Espaces bilinéaires hyperboliques	189
XIV.3 Le théorème de Witt, cas symétrique	194
XIV.4 Le théorème de Witt, cas alterné	200
XIV.5 Classification des espaces quadratiques	204
XIV.6 Espaces quadratiques et géométrie	212
XIV.7 La caractéristique 2	218
XIV.8 Formes sesquilinéaires	232
Exercices du chapitre XIV	243
Chapitre XV. Groupes classiques : exemples	247
XV.1 Groupe orthogonal en dimension 2	247
XV.2 La forme quadratique déterminant sur $\mathfrak{M}_2(K)$	253
XV.3 Groupes orthogonaux	257
XV.4 Groupes orthogonaux sur un corps fini	265
XV.5 Groupes symplectiques	267
XV.6 Groupes orthogonaux en caractéristique 2	275
Exercices du chapitre XV	283
Chapitre XVI. Groupes bilinéaires	285
XVI.1 La notion de groupe bilinéaire	285
XVI.2 Opérations sur les groupes bilinéaires	292
XVI.3 Discriminant, orthogonalité, isotropie	294
XVI.4 Le groupe discriminant	301
XVI.5 Les groupes $A, D, E$	308
XVI.6 Classification des groupes libres quadratiques	316
XVI.7 Classification des groupes finis quadratiques	324
XVI.8 Fonctions thêta	325
XVI.9 Equation fonctionnelle des fonctions thêta	330
XVI.10 Classification des groupes libres symplectiques	340
XVI.11 Classification des groupes finis symplectiques	342
Exercices du chapitre XVI	349

## VIII

Chapitre XVII. Cristallographie	353
XVII.1 Actions d'un groupe topologique	354
XVII.2 Compléments sur les groupes affines	360
XVII.3 Compléments sur les groupes linéaires	364
XVII.4 Groupes cristallographiques d'isométries	370
XVII.5 Etude algébrique des groupes cristallographiques	380
XVII.6 Domaine fondamental, pavages polyédraux stricts	390
XVII.7 Cristalloïdes, classes de cristal	404
XVII.8 Les 17 groupes cristallographiques plans	422
XVII.9 Générateurs et relations, groupes triangulaires	434
XVII.10 Racines, groupes de Weyl d'un réseau	441
XVII.11 Les réseaux $A$ et $D$	445
XVII.12 Le réseau $E_8$	450
Exercices du chapitre XVII	455
Chapitre XVIII. Algèbres de dimension finie sur un corps commutatif	463
XVIII.1 Introduction	463
XVIII.2 L'algèbre $\text{Hom}_K(V)$	467
XVIII.3 Modules simples, modules indécomposables	470
XVIII.4 Radical, algèbres semi-simples	476
XVIII.5 Algèbres simples	482
XVIII.6 Les théorèmes de structure	492
XVIII.7 Algèbres simples centrales	500
XVIII.8 Changement de corps de base	507
XVIII.9 Normes et traces	515
XVIII.10 Représentations linéaires	522
Exercices du chapitre XVIII	537

Chapitre XIX. Exemples d'algèbres	541
XIX.1 L'algèbre d'un groupe fini	541
XIX.2 Algèbres de Hecke	549
XIX.3 Algèbre de Hecke et groupe linéaire	556
XIX.4 Algèbres de quaternions	563
XIX.5 Algèbres cycliques	571
XIX.6 Quaternions et géométrie	578
XIX.7 Groupes polyédraux binaires	583
XIX.8 Le théorème de Jordan-Zassenhaus	592
XIX.9 Sous-groupes finis de $GL(n, \mathbf{Z})$	604
Exercices du chapitre XIX	604
Chapitre XX. Représentation des groupes finis	611
XX.1 Représentation et $K\{G\}$ -modules	611
XX.2 Représentation et produit tensoriel	618
XX.3 Orthogonalité des caractères	623
XX.4 Théorèmes fondamentaux sur les caractères	628
XX.5 Premiers exemples	637
XX.6 Restriction et induction des représentations	650
XX.7 Groupe quaternionique, groupes polyédraux	657
XX.8 Partitions d'entiers, tableaux de Young	667
XX.9 Construction de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$	678
Exercices du chapitre XX	696
Chapitre XXI. Invariants des groupes finis, fonctions symétriques	705
XXI.1 Théorème de finitude de Hilbert-Noether	705
XXI.2 La série de Hilbert-Poincaré	710
XXI.3 Polynômes symétriques	712
XXI.4 Séries génératrices et fonctions symétriques	717
XXI.5 Les polynômes de Schur	723
XXI.6 Démonstration du théorème de Frobenius	737
Exercices du chapitre XXI	745