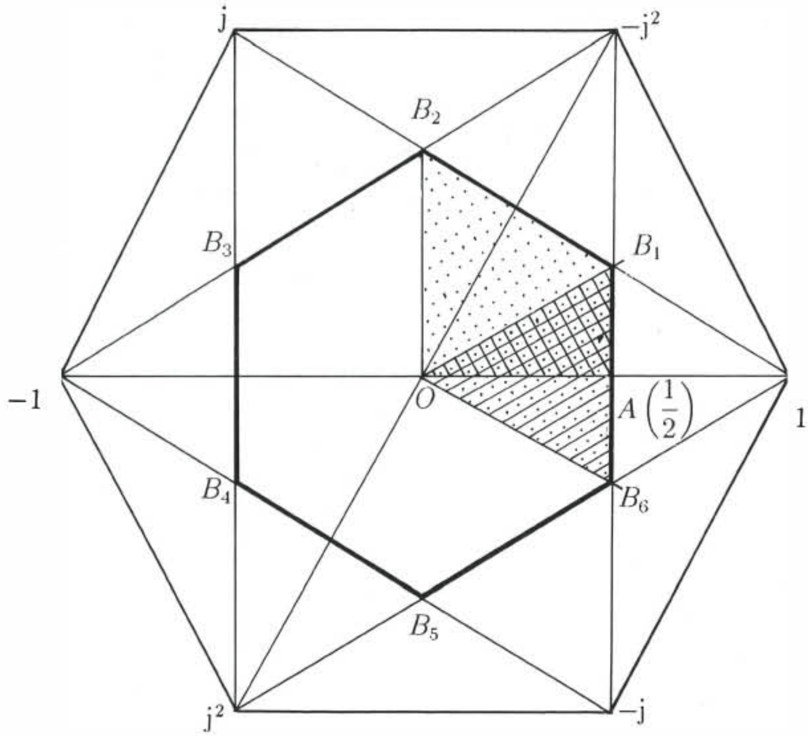
# GROUPES, ALGÈBRES ET GÉOMÉTRIE

## Tome 2





Jean-Marie ARNAUDIÈS

José BERTIN



ellipses

# Chapitre XI

# Le produit tensoriel

Avec la structure de groupe, la structure d'*algèbre* est l'une des plus fécondes en Mathématiques. L'étude des algèbres et des modules sur les algèbres constitue la *théorie des représentations.* Nous aborderons cette théorie plus loin, essentiellement avec des algèbres de dimension finie sur un corps commutatif.

Le présent chapitre est consacré à l'opération de base indispensable en théorie des représentations et des modules : le *produit tensoriel.* Il nous a paru intéressant de donner, en début de chapitre, des preuves élémentaires (n'utilisant pas l'algèbre extérieure) des propriétés de dimension des modules libres sur un anneau commutatif, ainsi que quelques développements plus poussés qu'au tome 1 sur les modules (avec anneau de base non nécessairement commutatif) et les algèbres.

# XI.1 Dimension des modules sur un anneau commutatif

Dans tout ce paragraphe, nous noterons $A$ un anneau commutatif non nul fixé. Notre but est ici d'étendre aux $A$-modules (introduits au chap. II) certaines des propriétés familières de la dimension des espaces vectoriels. On y parvient de façon élémentaire grâce à la théorie des *déterminants*, en étudiant les *systèmes d'équations linéaires sur* $A$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que le groupe $\mathrm{GL}(n, A)$ des $n$-matrices carrées inversibles sur $A$ est l'ensemble des $M \in \mathfrak{M}_n(A)$ telles que $\det(M) \in \mathcal{U}(A)$. (Voir par exemple [1], chapitre XIII et XIV). Si $M \in \mathrm{GL}(n, A)$, son inverse $M^{-1}$ est donnée par

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\widetilde{M} \tag{XI.1}$$

où $\widetilde{M}$ désigne la *matrice complémentaire* de $M$ (i.e. la transposée de la matrice des cofacteurs).

Dans ce qui suit, nous appellerons *système d'équations linéaires sur* $A$ (en abrégé : *système linéaire* sur $A$) toute équation de la forme :

$$(L) \qquad\qquad M\mathcal{X} = \boldsymbol{b},$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(A)$ et $\boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}_{n,1}(A)$ sont donnés, où $\mathcal{X} \in \mathfrak{M}_{p,1}(A)$ est l'inconnue, et où $M\mathcal{X}$ désigne le produit matriciel. Selon la terminologie habituelle, $M$ est appelée la *matrice du système*, $\boldsymbol{b}$ le *second membre*; les coefficients de $\mathcal{X}$ sont appelés les *inconnues*, il y a donc $p$ inconnues. Les équations scalaires obtenues en prenant les lignes de $(L)$ sont appelées les *équations du système*, il y en a donc $n$.

Le système est dit *homogène* ssi $\boldsymbol{b} = 0$; si $\boldsymbol{b}$ est quelconque, le système $(L_0)$ obtenu en remplaçant $\boldsymbol{b}$ par 0 dans $(L)$ est appelé le *système homogène associé à* $(L)$.
Pour tout système linéaire $(\Lambda)$ sur $A$, notons $\mathcal{S}_\Lambda$ l'ensemble de ses solutions. Si $(\Lambda)$ est homogène, il est clair que $\mathcal{S}_\Lambda$ est un sous $A$-module du $A$-module $A^N = A^{[\![1,N]\!]}$, où $N =$ nombre d'inconnues de $\mathcal{S}_\Lambda$. Sinon, pour tout élément $\mathcal{X}_0$ de $\mathcal{S}_\Lambda$, il est clair que $\mathcal{S}_\Lambda = \mathcal{X}_0 + \mathcal{S}_{\Lambda_0} = \{\mathcal{X}_0 + \mathcal{Y}\}_{\mathcal{Y} \in \mathcal{S}_{\Lambda_0}}$, mais attention, il n'est alors pas exclu que $\mathcal{S}_\Lambda$ soit vide !

Le système $(L)$ est dit *de Cramer* ssi $\boxed{n = p \text{ et } M \in \mathrm{GL}(n, A)}$ ; dans ce cas, $(L)$ admet une *unique solution*, qui est $\mathcal{X} = M^{-1}\boldsymbol{b}$, formule qui est équivalente aux suivantes, dites *de Cramer* :

$$\begin{cases} \mathcal{X} = {}^t[x_1, \ldots, x_n], \text{ avec pour } i \in [\![1, n]\!] : \\ \qquad x_i = (\det(M))^{-1} \det(M_i), \end{cases} \tag{XI.2}$$

où $M_i \in \mathfrak{M}_n(A)$ est définie par ses colonnes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ données, en notant $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de $M$, par : $\Gamma_j = C_j$ si $j \neq i$, $\Gamma_i = \boldsymbol{b}$.
La propriété suivante, très utile, a déjà été exploitée dans un cas particulier au § IV.4 :

**PROPOSITION XI.1** *Soit* $\mathcal{X} = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$ *une solution du système* $(L)$*, où l'on a supposé* $n = p$ *et* $\boldsymbol{b} = 0$*. Alors* $x_i \det(M) = 0$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$.

*Démonstration*

Posons $\Delta = \det(M)$ et $\widetilde{M} =$ matrice complémentaire de $M$. On sait que $\widetilde{M}M = \Delta I_n$ (où $I_n =$ matrice unité dans $\mathfrak{M}_n(A)$).
D'où : $\widetilde{M}M\mathcal{X} = (\Delta I_n)\mathcal{X} = 0 = {}^t[\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n]$, d'où $\Delta x_i = 0$ pour tout $i$. □

### Bases et applications $A$-linéaires

Rappelons qu'un $A$-module $\mathcal{M}$ est dit *libre* ssi il admet au moins une base; il sera dit *libre de type fini* ssi il admet au moins une base finie. Si $\mathcal{M}$ est nul, il admet une unique base, qui est la famille vide d'éléments de $\mathcal{M}$.
On conviendra que le module nul est libre de type fini. Rappelons que pour toute famille *libre* $(e_i)_{i\in I}$ d'un $A$-module $\mathcal{M}$, l'application $I \to \mathcal{M}$, $i \mapsto e_i$ est injective, d'où $\operatorname{card}(I) = \operatorname{card}(\{e_i\}_{i\in I})$ (fini ou infini). En particulier, le cardinal, fini ou infini, d'une éventuelle base de $\mathcal{M}$, est bien défini, ce qui pose la question de l'indépendance de ce cardinal relativement au choix de la base. Une des plus importantes propriétés des bases est la suivante, qui se démontre exactement comme dans le cas des espaces vectoriels :

**PROPOSITION XI.2** *Soit $\mathcal{M}$ un $A$-module libre non nul, et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de $\mathcal{M}$. Pour tout $A$-module $\mathcal{N}$, et pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{N}$, il existe un élément et un seul $\varphi$ de $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ tel que $\varphi(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$. Cet élément $\varphi$ est injectif ssi la famille $(f_i)_{i\in I}$ est libre, est surjectif ssi la famille $(f_i)_{i\in I}$ engendre le $A$-module $\mathcal{N}$, et est bijectif ssi $(f_i)_{i\in I}$ est une base de $\mathcal{N}$.*

(On dit que $\varphi$ est obtenu en *prolongeant par $A$-linéarité* les relations $\varphi(e_i) = f_i$).
En particulier, soit $I$ un ensemble non vide, et soit $\mathcal{C} = (e_i)_{i\in I}$ la base canonique du $A$-module $A^{(I)}$. En prenant $\mathcal{M} = A^{(I)}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ dans la proposition XI.2, on voit qu'*un $A$-module admet une base indexée par $I$ ssi il est isomorphe à $A^{(I)}$*. Lorsque $I = [\![1,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $A^{(I)} = A^n$, la structure de $A$-module de $A^{(I)}$ s'identifiant alors à la structure de $A$-module produit de $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ fois}$, où $A$ est muni de sa structure naturelle de $A$-module.
De ce qui précède, il ressort qu'un $A$-module non nul $\mathcal{M}$ est libre de type fini ssi il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{M}$ soit isomorphe à $A^n$.

### Modules libres de type fini

Soit $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}$ trois $A$-modules non nuls libres de type fini, munis de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_p)$, $\mathcal{D} = (g_1, \ldots, g_q)$. A toute application $A$-linéaire $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, est associée une unique matrice $M = [m_{i,j}]_{\begin{cases} 1\le i\le p \\ 1\le j\le n\end{cases}} \in \mathfrak{M}_{p,n}(A)$, que nous noterons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)$, et qui est caractérisée par les relations $(\forall j \in [\![1,n]\!])$ $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{p} m_{ij} f_i$. (La justification de cette assertion découle de la Proposition XI.2). On voit aisément que l'*application* $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N}) \to \mathfrak{M}_{p,n}(A)$, $\varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)$ *est un isomorphisme de $A$-modules*, et que pour tous $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ et $\psi \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{N},\mathcal{P})$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi), \tag{XI.3}$$

la *commutativité* de $A$ jouant le rôle essentiel dans l'établissement de (XI.3).

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathcal{M}$ et $y = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j \in \mathcal{N}$ (où $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ et $(y_1, \ldots, y_p) \in A^p$), en posant $\mathcal{X} = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$ et $\mathcal{Y} = {}^t[y_1, \cdots, y_n]$, on voit immédiatement que

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour toute } \varphi \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N}), \text{ avec } M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi), \text{ les relations} \\ y = \varphi(x) \text{ et } \mathcal{Y} = M\mathcal{X} \text{ sont équivalentes,} \end{array}\right. \tag{XI.4}$$

cette équivalence (XI.4) est le lien principal entre la théorie des $A$-modules et celle des systèmes linéaires sur $A$.

Pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{M})$, on notera $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$. Ce qui précède montre alors que l'*application* $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M}) \to \mathfrak{M}_n(A)$, $\varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *est un isomorphisme de $A$-algèbres. Cet isomorphisme induit un isomorphisme du groupe* $\mathrm{GL}_A(\mathcal{M})$ *des automorphismes du $A$-module $\mathcal{M}$ sur le groupe* $\mathrm{GL}(n, A)$.

**PROPOSITION X.1** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = [m_{i,j}] \in \mathfrak{M}_n(A)$. Notons $u$ l'élément de $\mathrm{Hom}_A(A^n)$ de matrice $M$ dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ du $A$-module $A^n$. Les six propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(I)* $M \in \mathrm{GL}(n, A)$;

*(II) $M$ est inversible à droite ou inversible à gauche dans $\mathfrak{M}_n(A)$;*

*(III) $u$ est surjectif;*

*(IV) pour tout second membre $\boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}_{n,1}(A)$, le système linéaire $M\mathcal{X} = \boldsymbol{b}$ sur $A$ admet une solution au moins*

*(V) $u$ est bijectif;*

*(VI) pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}_{n,1}(A)$, le système linéaire $M\mathcal{X} = \boldsymbol{b}$ sur $A$ admet une solution unique.*

*Démonstration*

Les équivalences $(III) \Leftrightarrow (IV)$ et $(V) \Leftrightarrow (VI)$ découlent de (XI.4). L'équivalence $(I) \Leftrightarrow (V)$ vient du fait que $\varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ définit un isomorphisme de $A$-algèbres de $\mathrm{Hom}_A(A^n)$ sur $\mathrm{GL}(n, A)$. Les implications $(I) \Rightarrow (II)$ et $(V) \Rightarrow (III)$ sont évidentes. Il reste à prouver les implications $(II) \Rightarrow (I)$ et $(III) \Rightarrow (II)$.

- Implication $(II) \Rightarrow (I)$ :
  si $N \in \mathfrak{M}_n(A)$ vérifie $MN = I_n$ ou $NM = I_n$, en prenant les déterminants on en déduit $1 = \det(I_n) = \det(M) \times \det(N)$, d'où $\det(M) \in \mathcal{U}(A)$, d'où $M \in \mathrm{GL}(n, A)$. Ce qui prouve : $(II) \Rightarrow (I)$.

- Implication $(III) \Rightarrow (II)$ :
  Supposons donc $u$ surjectif. Pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$, soit $V_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} e_i \in A^n$ tel que $u(V_j) = e_j$. Notons $N$ la matrice $[v_{ij}]_{\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}}$ $(N \in \mathfrak{M}_n(A))$.
  Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ :
  $e_j = u(V_j) = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} \left( \sum_{k=1}^{n} m_{ki} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} m_{ki} v_{ij} \right) e_k$, d'où par identification immédiate $MN = I_n$. Ce qui prouve bien : $(III) \Rightarrow (II)$ □

La proposition X.1 permet d'établir le théorème de la dimension [1] pour les $A$-modules *libres de type fini* (c'est-à-dire admettant au moins une base finie) :

**THEOREME X.1** *Soit $\mathcal{M}$ un $A$-module non nul libre de type fini. Toutes les bases de $\mathcal{M}$ sont finies et ont même cardinal.*

[1] Dans un autre contexte (modules de type fini sur un anneau noethérien), le mot *dimension* peut avoir un autre sens : dimension de Krull [000]. Cette notion n'étant pas utilisée dans le présent livre, la *dimension* (on dit aussi le *rang*) s'entendra toujours selon la définition XI.1 ci-dessous.

*Démonstration*

a) Montrons d'abord que toute base de $\mathcal{M}$ est finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base finie de $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{G}$ désigne une partie génératrice de $\mathcal{M}$, du fait que chaque $e_i$ est combinaison $A$-linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{G}$, on déduit qu'il existe une partie *finie* $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ qui engendre $\mathcal{M}$. Donc si $\mathcal{C} = (f_i)_{i \in I}$ est une autre base de $\mathcal{M}$, on a une partie *finie* $J$ de $I$ telle que $(f_i)_{i \in I}$ engendre $\mathcal{M}$, ce qui force $J = I$ et donc la base $\mathcal{C}$ est aussi finie.

b) Pour voir que toutes les bases de $\mathcal{M}$ ont même cardinal, il suffit de prouver que si on a deux entiers $p$, $q$ avec $1 \leq p \leq q$ et un isomorphisme de $A$-modules $\varphi : A^p \to A^q$, alors $p = q$. S'il en est ainsi, soit $\varpi : A^q \to A^p$ la projection naturelle $(x_1, \ldots, x_q) \mapsto (x_1, \ldots, x_p)$ : elle est $A$-linéaire surjective, de noyau isomorphe à $A^{q-p}$; donc $\varpi$ est bijective ssi $p = q$. Or $\varpi \circ \varphi : A^p \to A^p$ est surjective, donc est bijective à cause de la proposition XI.3. A fortiori $\varpi$ est injective, ce qui entraîne $p = q$. □

On peut donc poser :

**DEFINITION XI.1** *On appelle dimension, ou encore rang, d'un $A$-module $\mathcal{M}$ non nul libre de type fini, l'unique entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{M}$ soit isomorphe à $A^n$, i.e. tel que toute base de $\mathcal{M}$ ait $n$ éléments. On notera $n = \dim_A(\mathcal{M}) = \mathrm{rang}_A(\mathcal{M})$.*

On complète cette définition en attribuant la dimension 0 au module nul. Si $A$ est un corps commutatif $K$, on retrouve évidemment la notion bien connue de dimension d'un $K$-espace vectoriel. Cependant les agréables propriétés de cette dernière ne s'étendent pas toutes, loin s'en faut, à la dimension des $A$-modules lorsque $A$ est quelconque. Les difficultés majeures viennent de ce que d'une part, un sous-module $\mathcal{N}$ d'un $A$-module $\mathcal{M}$ libre de type fini n'est même pas libre en général; et que d'autre part, même si $\mathcal{N}$ est libre, il n'admet pas en général de sous-module supplémentaire dans $\mathcal{M}$, ce qui interdit tous les théorèmes gravitant autour du théorème de la base incomplète des espaces vectoriels.

Nous nous bornerons ci-après à donner quelques propriétés élémentaires de la dimension des $A$-modules libres.

Tout d'abord, pour tous entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme évident de $A$-modules $A^n \times A^p \xrightarrow{\cong} A^{n+p}$, d'où l'on déduit :

**PROPOSITION XI.4** *Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux $A$-modules libres de type fini, $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ l'est aussi, et on a :*

$$\dim_A(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) = \dim_A(\mathcal{M}) + \dim_A(\mathcal{N}).$$

Une conséquence évidente est que si $\mathcal{M}$ est un $A$-module, et si $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_m$ sont des sous $A$-modules de $\mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{N}_i$, avec chaque $\mathcal{N}_i$ libre de type fini, alors $\mathcal{M}$ est libre de type fini et on a : $\dim_A(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{m} \dim_A(\mathcal{N}_i)$.

Pour aller plus loin, nous utiliserons les sous-matrices et les mineurs d'une matrice (voir par exemple [1], chapitre XI). Si $M = [m_{i,j}] \in \mathfrak{M}_{n,p}(A)$ (où $n \geq 1$, $p \geq 1$), pour toutes parties $I = \{i_1, \ldots, i_\alpha\}$ de $[\![1, n]\!]$ et $J = \{j_1, \ldots, j_\beta\}$ de $[\![1, p]\!]$ où $1 \leq i_1 < \ldots < i_\alpha \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_\beta \leq p$, nous noterons $\mathrm{M}_{I,J}(M)$ la sous-matrice $[m_{i_k, j_\ell}]_{\begin{cases} 1 \leq k \leq \alpha \\ 1 \leq \ell \leq \beta \end{cases}}$ de $M$, et lorsque $\alpha = \beta$, nous noterons $\Delta_{I,J}(M) = \det(\mathrm{M}_{I,J}(M))$, ce mineur, dit d'ordre $\alpha$, étant appelé le $(I, J)$-mineur de $M$. On convient que : $\Delta_{\emptyset,\emptyset}(M) = 1_A$. C'est l'unique mineur d'ordre 0 de $M$. Nous noterons aussi $\varrho(M)$ le plus grand des entiers $\nu \geq 0$ tels que pour tout $a \in A\backslash\{0\}$, il existe un mineur $\Delta$ d'ordre $\nu$ de $M$ tel que $\Delta a \neq 0$. Cet entier $\varrho(M)$ est bien défini, puisque l'unique mineur d'ordre 0 de $M$ vaut 1, et que $1 \times a = a \neq 0$ pour tout $a \in A\backslash\{0\}$. On a $\varrho(M) \leq \mathrm{Min}(n,p)$ et lorsque $A$ est un corps commutatif, il est clair que $\varrho(M)$ n'est autre que le classique rang de $M$.

**THEOREME XI.2** *(Mac Coy)*
*Soit $M = [m_{i,j}] \in \mathfrak{M}_{n,p}(A)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$); notons $\varrho = \varrho(M)$. Supposons $\varrho < p$. Alors le système linéaire $M\mathcal{X} = 0$ admet une solution $\mathcal{X} \in \mathfrak{M}_{p,1}(A)\backslash\{0\}$.*

*Démonstration*

a) Cas où $\varrho = n$.
Par définition de $\varrho$, il existe alors un mineur $\Delta$ d'ordre $n$ de $M$ qui est $\neq 0$. On peut supposer que $\Delta = \Delta_{[\![1,n]\!],[\![1,n]\!]}(M) \neq 0$. Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, notons $D_i = \Delta_{[\![1,n]\!],[\![1,n+1]\!]\backslash\{i\}}(M)$, d'où $D_{n+1} = \Delta$. Posons $x_i = (-1)^{i+1}D_i$ si $i \in [\![1, n+1]\!]$, $x_i = 0$ si $i \leq p$ et $i > n+1$, et soit $\mathcal{X} = {}^t[x_1 \ldots, x_p]$. On a bien $\mathcal{X} \in \mathfrak{M}_{p,1}(A)\backslash\{0\}$. De plus pout tout $i \in [\![1,n]\!]$, il est clair que l'élément $\xi_i = \sum_{j=1}^{p} m_{i,j}x_j = \sum_{j=1}^{n+1} m_{i,j}x_j$ est le développement par rapport à sa première ligne d'un déterminant ayant deux lignes égales, (de façon précise le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n+1$ ayant pour 1-ère ligne la $i$-ième de $\mathrm{M}_{[\![1,n]\!],[\![1,n+1]\!]}(M)$, et ayant ses $n$ dernières lignes égales à celles de $\mathrm{M}_{[\![1,n]\!],[\![1,n+1]\!]}(M)$), d'où $\xi_i = 0$. Cela prouve que $M\mathcal{X} = 0$.

b) Cas où $\varrho < n$.
Par définition de $\varrho$, on a un élément $a \in A\backslash\{0\}$ tel que $aD = 0$ pour tout mineur $D$ d'ordre $\varrho + 1$ de $M$. On peut alors choisir un mineur $\Delta = \Delta_{I,J}(M)$ d'ordre $\varrho$ de $M$ tel que $a\Delta \neq 0$. Soit $H$ une partie à $\varrho + 1$ éléments de $[\![1,p]\!]$ contenant $J$. Ecrivons : $H = \{j_1 \ldots, j_{\varrho+1}\}$, où $j_1 < \ldots < j_{\varrho+1}$. Définissons des suites $(z_1, \ldots, z_p) \in A^p$ et $(x_1, \ldots, x_p) \in A^p$ ainsi : $x_k = az_k$ pour $1 \leq k \leq p$, et
$$z_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin H \\ (-1)^{\alpha+1}\Delta_{I,H\backslash\{k\}}(M) & \text{si } k = j_\alpha \in H \end{cases}.$$
Alors $(x_1, \ldots, x_p) \neq (0, \ldots, 0)$, car si $\ell$ désigne l'élément de $H$ tel que $H\backslash\{\ell\} = J$, on a $x_\ell = az_\ell = \varepsilon a\Delta$ avec $\varepsilon \in \{-1_A, 1_A\}$, d'où $x_\ell \neq 0$.
Montrons que $\mathcal{X} = {}^t[x_1, \ldots, x_p]$ vérifie $M\mathcal{X} = 0$ : pour $i \in [\![1,n]\!]$, l'élément $\xi_i = \sum_{j=1}^{p} m_{i,j}x_j$ de $A$ vaut $a\eta_i$, où $\eta_i$ est le coefficient de la $i$-ème ligne de $M\,{}^t[z_1, \ldots, z_p]$.
Mais $\eta_i = \sum_{\alpha=1}^{\varrho+1} m_{i,j_\alpha}(-1)^{\alpha+1}\Delta_{I,H\backslash\{j_\alpha\}}(M)$ est le développement par rapport à la première ligne du déterminant de la matrice $N_i$ carrée d'ordre $\varrho + 1$ dont la 1ère ligne est $(m_{1,j_1}, \ldots, m_{i,j_{\varrho+1}})$ et dont les autres lignes sont celles de $\mathrm{M}_{I,H}(M)$. Si $i \in I$, $N_i$ a deux lignes égales, d'où $\eta_i = 0$; et si $i \notin I$, $\eta_i$ est un mineur d'ordre $\varrho + 1$ de $M$, d'où $a\eta_i = 0$. D'où toujours $\eta_i = 0$, ce qui signifie que $M\mathcal{X} = 0$. □

**COROLLAIRE XI.1** *Soit deux entiers $n$ et $p$ avec $0 \leq n < p$. Il n'existe aucune application $A$-linéaire injective de $A^p$ dans $A^n$.*

**COROLLAIRE XI.2** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $M \in \mathfrak{M}_n(A)$. Pour que le système linéaire $M\mathcal{X} = 0$ admette une solution $\mathcal{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(A)\backslash\{0\}$, il faut et il suffit que* $\det(M)$ *soit un diviseur de 0 dans $A$.*

*Démonstration*

La condition est nécessaire en vertu de la Proposition XI.1. Elle est suffisante en vertu du Théorème XI.2 car $\det(M)$ est diviseur de 0 dans $A$ ssi $\varrho(M) < n$. □

Revenons maintenant à la dimension des $A$-modules.

**PROPOSITION XI.5** *Soit $\mathcal{M}$ un $A$-module de type fini, engendré par $N$ éléments ($N \geq 1$). Alors $\mathcal{M}$ n'admet aucune famille libre à $N+1$ éléments.*

*Démonstration*
Par hypothèse, on a une application $A$ linéaire surjective $\varpi : A^N \to \mathcal{M}$. Supposons que $\mathcal{M}$ admette une famille libre à $N+1$ termes. On en déduirait une injection $A$-linéaire $\varphi : A^{N+1} \to \mathcal{M}$. Soit $(e_1, \ldots, e_{N+1})$ la base canonique de $A^{N+1}$. Pour $1 \leq n \leq N+1$, choisissons $a_n \in A^N$ tel que $\varpi(a_n) = \varphi(e_n)$. Soit $\psi \in \mathrm{Hom}_A(A^{N+1}, A^N)$ défini par $\psi(e_n) = a_n$ pour $1 \leq n \leq N+1$. Alors $\varphi = \varpi \circ \psi$, et puisque $\varphi$ est injective, a fortiori $\psi$ est injective, ce qui contredit le Théorème XI.2. Cette contradiction achève la démonstration. □

Nous allons maintenant affiner le Théorème XI.1 :

**THEOREME XI.3** *Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $A$-modules libres de type fini et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.*

*a) Si $\varphi$ est surjective, alors $\dim_A(\mathcal{N}) \leq \dim_A(\mathcal{M})$;*

*b) si $\varphi$ est injective, alors $\dim_A(\mathcal{N}) \geq \dim_A(\mathcal{M})$.*

*Démonstration*
Notons $m = \dim_A(\mathcal{M})$, $n = \dim_A(\mathcal{N})$. Il suffit d'envisager le cas où $m \geq 1$ et $n \geq 1$, et on se ramène alors au cas où $\mathcal{M} = A^m$ et $\mathcal{N} = A^n$.

a) Supposons $\varphi$ surjective et $n \geq m$. Soit $\varpi : A^n \to A^m$ la projection naturelle $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$. Alors $\varpi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_A(A^n)$ et $\varpi \circ \varphi$ est surjective, donc bijective d'après la Proposition XI.3. Donc $\varpi$ est injective, d'où $n = m$. Donc on ne peut avoir que $n \leq m$.

b) Cette assertion est conséquence immédiate du Corollaire XI.1 du Théorème XI.2. □

**COROLLAIRE XI.3** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathcal{M}$ un $A$-module de type fini engendré par $p$ éléments, avec $p \leq n$. Toute application $A$-linéaire $\varphi : \mathcal{M} \to A^n$ surjective est bijective. (Donc s'il existe une telle application, $\mathcal{M}$ est libre de type fini, de rang $n$).*

*Démonstration*
Par hypothèse, on a une application $A$-linéaire surjective $f : A^p \to \mathcal{M}$; soit $\varphi : \mathcal{M} \to A^n$ une application $A$-linéaire surjective. Alors $\varphi \circ f : A^p \to A^n$ est $A$-linéaire surjective, donc $n \leq p$ d'après le Théorème XI.3; donc $n = p$. Et puisque $\varphi \circ f$ est surjective, elle est maintenant bijective (cf. Proposition XI.3); donc $f$ est injective, et en fin de compte $f$ est bijective, donc $\mathcal{M}$ est libre de type fini, de rang $n$; et puisque $\varphi$ est surjective, elle est maintenant bijective (Proposition XI.3). □

**THEOREME XI.4** *Soit $I$ et $J$ deux ensembles infinis, et soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $A$-modules libres admettant respectivement des bases $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_j)_{j \in J}$ indexés par $I$ et $J$. Donnons-nous $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$*

*a) si $\varphi$ est surjective, alors $\mathrm{card}(J) \leq \mathrm{card}(I)$*

*b) si $\varphi$ est injective, alors $\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(J)$*

*c) En conséquence, si $\varphi$ est un isomorphisme, on a* $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(J)$.

*Démonstration*

L'assertion c) découle évidemment de a) et b).

*Assertion a)*

Pour chaque $i \in I$, notons $\varphi(e_i) = \sum_{j \in J} \lambda_{ji} f_j$, avec des $\lambda_{\alpha\beta} \in A$, et soit $T_i = \{j \in J | \lambda_{ji} \neq 0\}$. Chaque $T_i$ est un ensemble fini. Posons $\Lambda = \cup_{i \in I} T_i$, on a donc $\Lambda \subset J$, $\mathrm{card}(\Lambda) \leq \mathrm{card}(I)$, et l'image de $\varphi$ est contenue dans le sous $A$-module de $\mathcal{N}$ engendré par $\{f_j\}_{j \in \Lambda}$. Puisque $\varphi$ est surjective, cela force $\Lambda = J$, donc $\mathrm{card}(J) \leq \mathrm{card}(I)$.

*Assertion b)*

Pour toute partie finie $T$ de $J$, notons $\mathcal{N}_T$ le sous-$A$-module de $\mathcal{N}$ engendré par $\{f_j\}_{j \in T}$ et $s(T)$ la partie $\{i \in I | \varphi(e_i) \in \mathcal{N}_T\}$ de $I$. Puisque $\varphi$ est injective, le corollaire XI.1 du Théorème XI.2 montre que $s(T)$ est fini, de cardinal $\leq \mathrm{card}(T)$. On a donc défini une application $s : \mathcal{F}(J) \to \mathcal{F}(I)$, où $\mathcal{F}(I)$ et $\mathcal{F}(J)$ désignent respectivement l'ensemble des parties finies de $I$ et de $J$; il est clair que $s$ est croissante lorsqu'on ordonne $\mathcal{F}(I)$ et $\mathcal{F}(J)$ par inclusion.

Pour chaque $i \in I$, définissons $T_i \in \mathcal{F}(J)$ comme on l'a fait en a) ci-dessus. Soit $H \in \mathcal{F}(I)$. L'ensemble $T = \cup_{i \in H} T_i$ appartient à $\mathcal{F}(J)$, et vérifie $H \subset s(T)$. Notons $\mathcal{I}$ la partie de $\mathcal{F}(I)$ image de $s$. D'après ce qu'on vient de voir, si, pour $L \in \mathcal{I}$, on note $\mathcal{E}_L$ l'ensemble des $H \in \mathcal{F}(I)$ tels que $H \subset L$, on a $\cap_{L \in \mathcal{I}} \mathcal{E}_L = \mathcal{F}(I)$. Comme chaque $\mathcal{E}_L$ est fini, on en déduit $\mathrm{card}(\mathcal{I}) = \mathrm{card}(\mathcal{F}(I)) = \mathrm{card}(I)$. Mais puisque $\mathcal{I} = \mathrm{Im}(s)$, on a aussi $\mathrm{card}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{card}(\mathcal{F}(J)) = \mathrm{card}(J)$. En définitive $\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(J)$. □

En raison du Théorème XI.4, on peut définir la dimension d'un $A$-module libre $\mathcal{M}$ qui n'est pas du type fini : c'est le cardinal (infini) commun à toutes les bases de $\mathcal{M}$. (Cela s'applique en particulier aux espaces vectoriels de dimension infinie).

Nous conclurons ce paragraphe en insistant sur le fait que tous les résultats qu'il contient dépendent essentiellement de la *commutativité* de l'anneau de base $A$. La notion de $A$-module sera étendue ci-après au cas d'anneaux de base non commutatifs, et on perd alors la plupart des propriétés de la dimension vues ci-dessus; notamment le Théorème XI.1 ne peut en général être étendu au cas où $A$ n'est pas commutatif.

## XI.2 Modules et algèbres : généralités

### Modules

Soit $A$ un anneau (non nécessairement commutatif). Par définition, un *$A$-module à gauche* est un groupe abélien $M$ (que l'on note additivement) muni d'une loi externe $A \times M \to M$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ vérifiant les axiomes $(M1)$, $(M2)$, et $(M3)$ énoncés au début du chapitre (II) :

(M1) Pour tout $\lambda \in A$, l'application $M \to M$, $x \mapsto \lambda x$ est un endomorphisme du groupe $M$;

(M2) $(\forall x \in M)\ 1_A.x = x$;

(M3) $\forall (\lambda, \mu, x) \in A \times A \times M$, $\lambda.(\mu x) = (\lambda\mu).x$ .

On définit de même un *$A$-module à droite* : c'est un groupe abélien $(M, +)$ doté d'une loi externe $M \times A \to M$, $(x, \lambda) \mapsto x\lambda$ vérifiant les axiomes $(M'_1)$, $(M'_2)$, $(M'_3)$ ci-après :