Olivier Lafitte

Master

Problèmes d'optimisation continue

Avec corrigés et rappels de cours

ellipses

Chapitre 1

Résumé de cours

Remarques sur les méthodes et techniques utilisées dans ce texte.

Nous avons choisi, majoritairement, des problèmes faisant appel au calcul fonctionnel. Dans cette première section nous présentons quelques unes des remarques sur le corpus utile. Peu de problèmes sont sur les algorithmes ainsi que sur les méthodes de point selle, nous avons mis l'accent sur l'obtention, dans le cas d'une fonctionnelle non linéaire, du gradient et de la Hessienne de la fonctionnelle sur un espace de Hilbert, et leur utilisation sur des sous-espaces vectoriels ou affines de dimension finie. Ceci permettra aux étudiants ou professionnels désireux de s'entrainer à la dérivation de fonctionnelles de le faire, utilisant à la fois la dérivée de Fréchet :

Définition 1.1 *On dit que J est Fréchet-dérivable sur V espace de Hilbert si il existe une forme linéaire L_u, continue sur V, telle que*

$$\forall w \in V, ||J(u+w) - J(u) - L_u(w)|| \leq \epsilon_u(w)||w||.$$

et la dérivée de Gâteaux :

Définition 1.2 *On dit que J, définie sur un espace de Hilbert V, est Gâteaux-dérivable en u si la limite*

$$lim_{h \to 0} \frac{J(u+hw) - J(u)}{h}$$

existe et définit une forme linéaire continue sur V.

On note cette forme linéaire traditionnellement comme

$$L_u(w) = (J'(u), w)$$

D'autre part, il est aussi utile de noter que toutes ces définitions sont une généralisation mais aussi une réécriture du cas de la dimension 1, grâce à la formule de Taylor

$$J(u+w) = J(u) + \int_0^1 (J'(u+tw), w)dt$$

qui se réécrit aussi

$$J(u+hw) = J(u) + h\int_0^1 (J'(u+htw), w)ds.$$

La dérivée seconde est définie de manière identique grâce à la formule de Taylor :

Définition 1.3 *On dit que J est deux fois dérivable au sens de Fréchet sur V si il existe une forme linéaire L_u et une forme quadratique K_u sur V telle que*

$$J(u+w) = J(u) + L_u(w) + \tfrac{1}{2}K_u(w,w) + o(||w||^2)$$

La forme quadratique K s'obtient en considérant la dérivée de Gâteaux de L_u, qui s'obtient en calculant la limite de $h^{-1}(L_{u+hw_1} - L_u)$ lorsque h tend vers 0, sous la forme

$$K(w_1, w_2) = \lim_{h\to 0} \tfrac{(J'(u+hw_1),w_2)-(J'(u),w_2)}{h}$$

et ona de même la formule de Taylor

$$J(u+w) = J(u) + (J'(u), w) + \int_0^1 (1-t)(J''(u+tw)w, w)dt.$$

Il peut être utile de noter que l'ensemble de ces formules, pour u et w donnés, sont déduites de l'utilisation de la fonction de la variable réelle t :

$$\phi(t) = J(u+tw)$$

et toutes les expressions ci-dessus sont équivalentes à $\phi(1) = \phi(0) + \int_0^1 \phi'(t)dt$, ou $\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \int_0^1 (1-t)\phi''(t)dt$.

Quand il s'agit d'écrire l'équation différentielle ordinaire ou l'équation aux dérivées partielles que vérifie la solution d'un problème d'optimisation continue (qui sera la grande majorité des problèmes étudiés dans ce livre), même si la théorie des distributions donne une méthode élégante pour résoudre les problèmes, ce n'est pas une nécessité de l'utiliser, le concept de **dérivée faible** suffit :

Définition 1.4 *On appelle dérivée faible (gradient faible) d'un élément* $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *l'application linéaire continue sur* $H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, *donnée par*

$$< \partial_{x_j} u, w >= - < u, \partial_{x_j} w >, \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'application linéaire est continue. Par le théorème de Riesz, elle admet un unique représentant dans $(H_0^1(\Omega))'$. On a l'identité $\mathcal{F}(\partial_{x_j} u)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(u)(\xi) = i\xi_j \hat{u}(\xi)$, où $\mathcal{F}(u)$ ou $\hat{u}$ désignent la transformée de Fourier.

Il est bon de rappeler la définition de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$:

Définition 1.5 *Soit* $s \geq 0$. *La fonction u appartient à* $H^s(\mathbb{R}^d)$ *si et seulement si* $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *et si sa transformée de Fourier vérifie*

$$\int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Lorsque s est entier, on peut définir $H^s(\Omega)$, $\Omega \subset= \mathbb{R}^d$

Définition 1.6 *Soit s entier. La fonction u appartient à* $H^s(\Omega)$ *si et seulement si u appartient à* $L^2(\Omega)$ *et si toutes ses dérivées faibles jusqu'à l'ordre s appartiennent à* $L^2(\Omega)$. *Ces deux définitions coincident.*

Il est aussi bon de rappeler les résultats d'inégalité de Sobolev :

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^0(\mathbb{R}^d), s > \tfrac{d}{2}.$$

La démonstration de ce résultat s'effectue en considérant une fonction C^0 à support compact de $\mathbb{R}^d$, et d'utiliser le théorème d'inversion de Fourier

$$u(x) = \tfrac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix.\xi} \hat{\phi}(\xi) d\xi$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|u(x)| \leq \tfrac{1}{(2\pi)^d} (\int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}} (\int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autres inégalités de Sobolev seront aussi utilisées (inégalité de Gagliardo-Nirenberg, mais nous n'en donnerons pas ici la démonstration) :

L'espace $H^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ **s'injecte continuement dans** $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ **lorsque** $p^* = \frac{dp}{d-p}$**.** C'est à dire, pour l'espace H^1 classique, pour lequel $p = 2$, pour $d = 3$, alors $u \in H^1 \to u \in L^6$, et donc pour tout $2 \leq k \leq 6$, $u \in L^k(\Omega)$, Ω borné.

1.1 Optimisation en général

Dans ce résumé de cours nous nous concentrons essentiellement sur les résultats liés à l'optimisation continue c'est-à-dire les problèmes de minimisation sur des espaces fonctionnels comme les espaces de Hilbert ou les formulations variationelles ou au sens faible. Nous rappellerons aussi quelques un des résultats de minimisation d'une fonction quadratique sur $\mathbb{R}^d$ ou sur des espaces vectoriels de dimension finie ainsi que des problèmes de minimisation sous contrainte égalité en dimension infinie (ou finie). Nous décrirons enfin dans ce cadre quelques algorithmes classiques de minimisation un dimension finie.

Il est classique par exemple d'obtenir une condition nécessaire pour un point de minimum qui s'appelle équation d'Euler. Si on suppose de plus la fonctionnelle deux fois dérivable nous avons la condition de Legendre d'une part (condition nécessaire mais non suffisante) et la condition forte de Legendre (suffisante mais non nécessaire) d'autre part.

Ensuite nous étudierons le cas où, en dimension finie ou infinie, la fonctionnelle sur V est quadratique (c'est à dire sa dérivée seconde est une constante en tant que forme bilinéaire symétrique sur V).

Nous résumons, par souci de simplicité, les résultats écrits de manière 'vague' mais afin de permettre au lecteur de comprendre du premier abord, les problèmes de minimisation. Les théorèmes précis sont dans la suite de ce résumé de cours. Nous présentons ici une terminologie intéressante, très parlante, qu'on peut trouver dans l'exposé de John Duchi au Séminaire de Mathématiques Appliquées du Centre de Recherches mathématiques le 9 novembre 2020 (accessible sur Youtube) :

1. L'oracle est la valeur (numérique) de la fonction, appartenant à un ensemble $\mathcal{F}$ (la classe) à minimiser en un point d'un espace X,
2. La réponse est le résultat x_k obtenu par une procédure qui fait appel à k appels de l'oracle et le calcul d'une suite de points x_j, $1 \leq j \leq k$
3. la mesure de performance est le maximum, pour f dans $\mathcal{F}$, de l'espérance
$$\mathcal{E}(f(x_k) - f(x_*)).$$

Théorème 1.1 *Soit E un espace et J une fonction dont on cherche le minimum. Plus exactement, selon John Duchi, on n'a besoin que de savoir comment obtenir $J(x_k) - J(x_*) \leq \epsilon$*

- *Si X est compact et si f est continue, il existe au moins un minimum.*
- *Si E est compact et si J est $L-$Lipschitz, il faut au plus $k = O(\sqrt{\frac{L diam X}{\epsilon}})$ itérations*

- *Si X est complet convexe et si f est convexe, il faut $k = O(d \ln \frac{1}{\epsilon})$ itérations au plus*
- *Si X est complet convexe et si J est $\lambda-$convexe ($\lambda > 0$), il existe un unique point de minimum*
- *Si E est complet convexe, si J est $\lambda-$convexe continue et si J' est $L-$Lipschitz, il faut au plus $O(\sqrt{\frac{L}{\lambda}} \ln \frac{1}{\epsilon})$ itérations.*

Cette présentation est intéressante, puisqu'elle vise à accéder dans un temps court à une bonne approximation du minimum plutôt qu'au minimum lui même. Ceci correspond aux inégalités de convergence des différents algorithmes de gradient.

Les résultats précis sur les problèmes de minimisation sont donc les suivants (sans évoquer ici les résultats sur le taux de convergence des algorithmes mentionnés dans le Théorème 1.1) :

Théorème 1.2 *Soit V un espace de Hilbert et J une fonctionnelle différentiable (1 ou 2 fois) au sens des définitions précédentes*

Pour que $u \in V$ soit solution de

$$\begin{cases} \inf J(v) \\ v \in V \end{cases} \tag{1.1.1}$$

il **FAUT** *que $J'(u) = 0$* **(condition d'Euler)**.

(c'est-à-dire former cette équation, appelée équation d'Euler, donne tous les minima, entre autres points (elle donne aussi tous les maxima locaux)).

Si J est différentiable deux fois, on a, de plus **nécessairement**

$$\forall w \in V, (J"(u)w, w) \geq 0.$$

(condition de Legendre)

Théorème 1.3 *Supposons que J soit une fonctionnelle différentiable deux fois sur un espace de Hilbert V. Si u vérifie*

$$J'(u) = 0$$

et *pour tout $\tilde{u}$ dans un voisinage V_0 de u_0, on a la condition $(J"(\tilde{u})w, w) \geq 0$.* *(***condition forte de Legendre***),*

alors u est un point de minimum de J sur V.

Ces deux théorèmes montrent des conditions nécessaires d'une part, et des conditions suffisantes d'autre part.

Les conditions nécessaires permettent de trouver une « collection de points de minimum possibles », mais on ne sait pas comment choisir, à part calculer la valeur de J à tous ces points de minimum, et la plus petite valeur de J obtenue donne un point de minimum. On procède ainsi de la manière suivante :

i) on calcule toutes les solutions de $J'(u) = 0$,

ii) parmi toutes ces valeurs, on élimine, aux points où J' est dérivable, les points où $J'' \geq 0$ n'est pas vérifié,

iii) dans les points restant, on conserve le point où J prend la plus petite valeur.

Les conditions suffisantes permettent de démontrer que le point u qui les vérifie est un point de minimum, mais ne permettent pas de déterminer les points de minimum (il pourrait y en avoir aucun qui vérifie les conditions suffisantes).

Une condition plus forte que la condition forte de Legendre, et qui est aussi la plus utilisée en pratique est la suivante (et nous reviendrons sur cette condition dans le rappel des résultats du programme convexe) :

Théorème 1.4 *Supposons que J soit une fonctionnelle différentiable deux fois sur un espace de Hilbert V. Si u vérifie*

$$J'(u) = 0$$

et *la condition $(J"(\tilde{u})w, w) \geq \alpha ||w||_V^2$ (***condition d'ellipticité***), alors u est un point de minimum de J sur V.*

Se pose aussi la question de pouvoir traiter les cas d'optimisation sous contraintes. Dans ce résumé de cours, nous nous contentons du cas de contraintes égalité.

Nous avons besoin d'une définition : On désigne par K l'ensemble des contraintes et on cherche une éventuelle solution du problème

$$\inf_K J.$$

Lorsque $u \in K$, on définit les **directions admissibles de u dans K** par

Définition 1.7 *L'espace des directions admissibles au sens de Fréchet pour $u \in K$ est l'ensemble des w de V tels qu'il existe une suite w_n de V tendant vers w et une suite $e_n \geq 0$, $e_n \to 0$, telle que $u + e_n w_n \in K$. L'ensemble des directions admissibles est noté $K(u)$.*

Il est parfois suffisant de considérer uniquement des w tels qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $u + tw \in K$ pour tout $0 \leq t < \epsilon$. Ces directions portent le nom de directions admissibles au sens de Gâteaux.

Une fois ces directions admissibles définies, le problème de minimisation sous contraintes utilise le résultat suivant :

Théorème 1.5 *(Inéquations d'Euler)*
Si J est dérivable au sens usuel (de Fréchet), pour que u soit solution de (1.1.1), il **faut** *que*

$$\forall w \in K(u), (J'(u), w) \geq 0.$$

Sur $K = \{u \in V, F_1(u) = 0, F_2(u) = 0, ..F_m(u) = 0\}$, on rappelle alors le résultat suivant, les fonctions $F_1, ...F_m$ étant dérivables au sens de Fréchet.

Proposition 1.1 *Soit $u \in K$. Sous la condition $F_1'(u)F_2'(u), ..F_m'(u)$ famille libre de V' (formes linéaires continues sur V), et on dit que les contraintes $F_1, ..., F_m$ sont* **régulières** *en u, l'espace $K(u)$ des directions admissibles est l'intersection des noyaux des formes linéaires $F_j'(u)$ (c'est à dire l'ensemble des w tels que $(F_j'(u), w) = 0$ pour tout j. Si les formes linéaires $F_j'(u)$ sont représentées (par le théorème de Riesz) par des éléments de l'espace $F_j'(u)$ (en gardant la même notation), une direction admissible est dans l'espace vectoriel $E^\perp$ orthogonal à l'espace E engendré par les* **vecteurs** *$(F_j'(u))$,*

et on a le

Théorème 1.6 *Pour que u tel que $(F_j'(u))_j$ forme une famille libre (on dit que* **les contraintes** *$F_j(v), 1 \leq j \leq m$* **sont régulières en** *u), soit solution de (1.1.1), il* **faut** *qu'il existe m réels $\lambda_1, ...\lambda m$ tels que*

$$J'(u) + \lambda_1 F_1'(u) + \lambda_2 F_2'(u) + ... + \lambda_m F_m'(u) = 0$$

Dans ce cas, comme précédemment, la méthode est alors la suivante :

• on suppose que les contraintes sont régulières en u, et on considère un $m-$uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$.

• on cherche alors tous les éléments $u^j(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ solution de l'égalité dans V'

$$J'(u) + \sum_p \lambda_p F_p'(u) = 0$$

(on peut aussi prendre les représentants respectifs de $J'(u)$ et de $F_p'(u)$ en appliquant le théorème de Riesz).

On cherche, pour chaque j, l'ensemble $U_j \subset \mathbb{R}^m$ des $\vec{\lambda}^j$ qui sont solution du problème

$$\forall p \in \{1, ..., m\}, F_p(u^j(\lambda_1, ..., \lambda_m)) = 0.$$

• Pour chacun des éléments de U_j, on calcule $J(u^j(\lambda_1, ..., \lambda_m))$, et dans l'ensemble de tous les cas parcourus, on prend ceux qui correspondent à la plus petite valeur de J.

1.2 Programme convexe

Définition 1.8 *Soit K un ensemble convexe non vide (c'est-à-dire vérifiant, pour tout u, v dans K et tout réel β de $[0, 1]$, $\beta u + (1 - \beta)v \in K$.) On dit que la fonction J définie sur K est une fonction convexe si et seulement si on a*

$$\forall \beta \in [0, 1], \forall (u, v) \in K^2, J(\beta u + (1 - \beta)v) \leq \beta J(u) + (1 - \beta)J(v).$$

La fonctionnelle J est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte pour $\beta \in]0, 1[$ et $u \neq v$.

La fonctionnelle J est dite $\alpha-$convexe lorsque

$$J(\frac{u+v}{2}) \leq \frac{J(u) + J(v)}{2} - \frac{\alpha}{8}||u - v||^2$$

On a alors

Lemme 1.1 *Si J est $\alpha-$convexe et continue, elle est strictement convexe. De plus,*

$$J(\theta u + (1 - \theta)v) \leq \theta J(u) + (1 - \theta)J(v) - \frac{\alpha\theta(1 - \theta)}{2}||u - v||^2.$$

Dans le cas d'une fonctionnelle convexe, on a le résultat général suivant

Proposition 1.2 *Soit J une fonctionnelle convexe sur un ensemble convexe K. Tout point de minimum local est un point de minimum global, et les points de minimum forment un ensemble convexe. Cet ensemble convexe est réduit à un point lorsque J est strictement convexe*

La définition donnée ci-dessus de la convexité n'est pas forcément la plus facile. On a alors une caractérisation qui est donnée par la Proposition suivante