

Abir Lassoued  
Olfa Boubaker

Élèves  
ingénieurs  
Licence  
Master

# Systemes non-linéaires

Cours et exercices avec solutions



# Chapitre 1 – Introduction aux systèmes non-linéaires

## 1.1. Introduction

Bien que la théorie des systèmes linéaires soit un domaine assez mûr avec une variété de méthodes puissantes pour l'analyse et le contrôle ainsi qu'une longue histoire d'applications industrielles réussies, une large communauté d'ingénieurs et de chercheurs ont montré, depuis au moins deux décennies, un intérêt déployé pour la théorie des systèmes non-linéaires. Cette communauté s'intéresse principalement aux domaines de la robotique, de l'aéronautique, de l'énergie, des procédés biochimiques et de l'ingénierie biomédicale. De nombreuses raisons peuvent être citées dans ce sens afin de justifier l'intérêt porté à la théorie des systèmes non-linéaires :

- tous les systèmes physiques sont intrinsèquement non-linéaires. Ainsi, tous les systèmes de contrôle doivent l'être dans une certaine mesure ;
- les méthodes de contrôle linéaires s'appuient sur l'hypothèse clé du fonctionnement à petite portée pour que le modèle linéaire soit valide. Quand la plage de fonctionnement requise est grande, cette hypothèse n'est plus admissible ; de ce fait, un contrôleur linéaire est susceptible d'être instable parce que les non-linéarités ne peuvent pas être correctement compensées ;
- l'hypothèse majeure du contrôle linéaire suppose que le modèle du système ainsi que son contrôleur sont linéaires. Toutefois, pour les systèmes de contrôle, il existe de nombreuses non-linéarités dont la nature discontinue ne permet pas une approximation linéaire telle que, par exemple, la saturation des actionneurs. Ces non-linéarités se trouvent en abondance et leurs effets ne peuvent pas être dérivés de méthodes linéaristes.

Certainement qu'il existe d'autres raisons non citées précédemment qui nous motivent pour l'utilisation de la théorie des systèmes non-linéaires. L'apprentissage des techniques de base de l'analyse et de la conception des lois de commande non-linéaires ne peut qu'améliorer la capacité de l'ingénieur à faire face à des problèmes de contrôle pratiques d'une manière plus efficace. Il fournit également une meilleure compréhension du monde réel qui est, sans aucun doute, intrinsèquement non-linéaire.

## 1.2. Systèmes linéaires : quelques rappels

### Définition 1.1.

Un système est dit linéaire s'il peut être décrit par des équations différentielles linéaires d'ordre fini à coefficients constants. ■

### Remarque 1.1

Au sens des mathématiques, un système est linéaire, si on peut y appliquer le principe de superposition illustré par l'exemple 1.1. Le principe de superposition implique les deux propriétés suivantes :

- à la somme de deux entrées correspond la somme des deux sorties correspondantes ;
- au multiple d'une entrée correspond le même multiple de la sortie correspondante. ■

### Exemple 1.1.

La Figure 1.1 rappelle le principe de superposition dans le cas des circuits électriques composés exclusivement d'éléments linéaires ; la réponse dans une branche est égale à la somme des réponses pour chaque générateur indépendant pris isolément en désactivant tous les autres.

Pour calculer la tension au point P, la formule du diviseur de tensions est utilisée pour les circuits électriques exposés sur les Figures 1.1(a) et 1.1(b). Soient  $V_{R_1}$  la tension aux bornes de la résistance  $R_1$  et  $V_{R_2}$  la tension aux bornes de la résistance  $R_2$ , on aura :

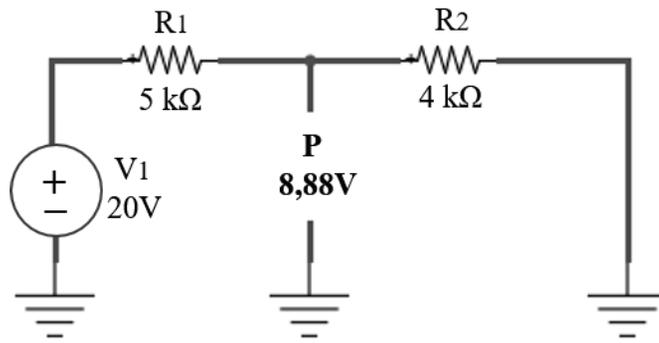
$$V_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 = 8.88V$$

$$V_{R_1} = \frac{-R_1}{R_1 + R_2} V_2 = -2.77V$$

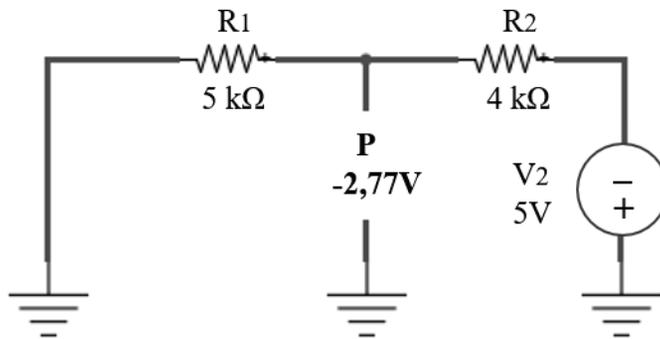
Sur la Figure 1.1(c), le principe de superposition permet de calculer la tension au point P quand les deux générateurs de tensions existent :

$$V_P = -2.77V + 8.88V = 6.11V$$

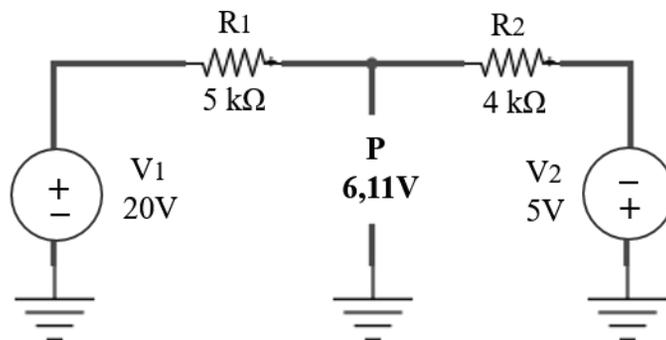
Il faut noter que le principe de superposition appliqué ici ne fait pas appel à une représentation en système différentiel. Il illustre tout simplement ce principe.



(a)



(b)



(c)

**Figure 1.1.** Illustration du principe de superposition sur un circuit électrique linéaire.



### 1.2.1. Représentation d'état linéaire et point d'équilibre

Un système linéaire à temps invariant est décrit par :

$$\dot{x} = Ax \quad (1.1)$$

où  $x \in \mathfrak{R}^n$  est un vecteur d'état et  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  est une matrice constante de dimension appropriée appelée matrice d'état du système ou matrice dynamique. Le paramètre  $n$  est appelé ordre du système. Si  $A$  est non singulière, le système linéaire possède un seul point d'équilibre qui est l'origine  $x = 0$ . Sinon, il possède une infinité de points d'équilibre.

#### Exemple 1.2.

Soit le système linéaire décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + \dot{y} = 0$$

Tous les points sur l'axe des abscisses sont des points d'équilibre. En posant  $x = (x_1 \ x_2)^T = (y \ \dot{y})^T$ , le système peut être décrit par :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

La matrice d'état est singulière, le système linéaire possède donc un nombre infini de solutions. ■

En présence d'un vecteur d'entrées extérieures  $u \in \mathfrak{R}^m$ , le système est décrit par :

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (1.2)$$

Souvent une autre équation est associée au système (1.2) appelée équation de sortie. Celle-ci définit un vecteur  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  d'un intérêt particulier incluant un ensemble de variables mesurables par des capteurs ou un ensemble de variables à contrôler. Nous appellerons alors l'équation (1.2) associée à (1.1) représentation d'état du système linéaire. La représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des matrices de dimensions appropriées appelées respectivement matrice d'état, matrice de commande, matrice de sortie et matrice de transfert directe. Un système linéaire peut être représenté par un système différentiel, une matrice de transfert ou par une représentation d'état linéaire à temps invariant. Plus de détails sur le passage entre ces trois types de modèles mathématiques sont donnés dans [1, 2, 3].

### 1.2.2. Propriétés

Il faut admettre que la théorie des systèmes linéaires est très mûre et que les méthodes d'analyse et de synthèse de ces systèmes ont fait preuve d'efficacité en raison des nombreux outils mathématiques disponibles en algèbre linéaire. Un système linéaire à temps invariant possède les propriétés suivantes [1, 2, 3] :

- le principe de superposition s'applique ;
- le système possède un seul point d'équilibre à l'origine  $x = 0$  si la matrice d'état  $A$  est non singulière ; sinon le système possède une infinité de points d'équilibre ;
- la stabilité du système est facilement analysée par simple examen des valeurs propres de la matrice d'état du système ; le système est asymptotiquement stable si, et seulement si, tous ses pôles sont situés dans le demi-plan gauche ouvert. Le système est stable au sens de Lyapunov si, seulement si, tous ses pôles sont placés dans le demi-plan gauche fermé, c'est-à-dire ont tous une partie réelle négative ou nulle et ceux situés sur l'axe imaginaire, s'ils en existent, étant simple (c'est-à-dire d'ordre 1) ;
- la stabilité locale est confondue à la stabilité globale. Elle ne dépend pas des conditions initiales du système ni des entrées de référence ;
- la stabilité asymptotique implique la stabilité entrée bornée-sortie bornée : dans ce cas si un système est stable, alors pour toute entrée bornée, la sortie du système l'est également ;
- une analyse fréquentielle est possible ; des sorties sinusoïdales sont obtenues par simple application d'entrées sinusoïdales au système ;
- une solution analytique du système existe toujours ; pour des conditions initiales  $x(0)$ , la solution du système (1.1) est  $x(t) = e^{At}x(0)$ . Pour des conditions initiales  $x(0)$ , le système (1.2) possède la solution :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau;$$

- le temps d'évasion du système linéaire instable va à l'infini à mesure que le temps approche de l'infini ;
- des conditions nécessaires et suffisantes existent pour analyser la commandabilité (critère de Kalman pour la commandabilité) et l'observabilité du système (critère de Kalman pour l'observabilité) ;
- une variété d'outils et de méthodes intéressantes existent pour la synthèse de lois de commande et d'observateurs d'état. Ces méthodes ont fait preuves dans le domaine de la théorie du contrôle linéaire.

### 1.2.3. Limitations d'une représentation linéaire

La modélisation d'un système physique par une représentation linéaire possède plusieurs limitations :

- aucun système physique réel n'est complètement linéaire ;
- la théorie des systèmes linéaires n'est applicable que dans un domaine de fonctionnement restreint du système physique réel ;
- certains systèmes physiques ne peuvent pas être modélisés, même localement, par des systèmes linéaires. Un exemple concret est le relais, que ce soit sous sa forme électromagnétique ou sa forme électronique (transistor en commutation, thyristor...)
- certains phénomènes ne peuvent pas être décrits par des modèles linéaires (intégration avec seuil, phénomènes de pompage ...).

Dans la suite on donne deux exemples de systèmes mécaniques qui montrent les limitations d'une représentation linéaire pour un système physique réel.

#### Exemple 1.3.

Considérons le système pendule simple inversé décrit la Figure 1.2 [4].

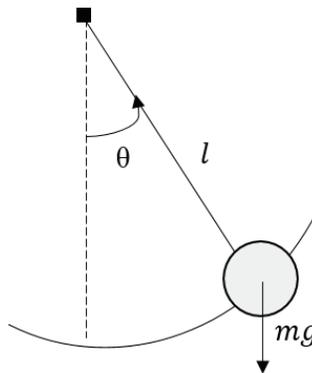


Figure 1.2. Pendule simple inversé.

avec :

$l$  : longueur du fil du pendule ;

$m$  : masse de la boule suspendue à l'extrémité du fil ;

$\theta$  : position angulaire du pendule par rapport à l'horizontal ;

$g$  : accélération de la pesanteur ;

$k$  : constante de frottement.

En utilisant la méthode de Newton-Euler, la dynamique du pendule simple inversé peut être décrite par :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{k}{m} \dot{\theta} = 0 \quad (1.4)$$

où la non-linéarité ici est la fonction trigonométrique  $\sin \theta$ .

Soit  $x_1 = \theta$  et  $x_2 = \dot{\theta}$ , le système peut être décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{cases} \quad (1.5)$$

Pour trouver les points d'équilibre, on résout le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Il s'avère que les points d'équilibre sont situés à  $(n\pi \quad 0)$  pour  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . En se basant sur des considérations physiques, il est clair que le système possède les deux points d'équilibre  $(0 \quad 0)$  et  $(\pi \quad 0)$ . Les autres points ne sont que des répétitions de ces points correspondants à des balancements multiples. Nous concentrerons notre attention dans la suite de l'exemple sur les points d'équilibre définis sur  $[0 \quad 2\pi[$ .

Pour obtenir une représentation d'état linéaire, il suffit de considérer l'hypothèse  $\sin \theta \cong \theta$ . On aura ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{cases}$$

Le système précédent possède le seul point d'équilibre  $(0 \quad 0)$ . En conclusion, le système linéaire possède un seul point d'équilibre alors que le système non-linéaire possède plusieurs points d'équilibre, plus exactement deux points sur  $[0 \quad 2\pi[$ . Par conséquent, le système linéaire ne décrit pas fidèlement le système physique réel d'autant plus que la stabilité du système en ses deux points d'équilibre est différente. Ce détail sera démontré dans les chapitres suivants. ■

#### Exemple 1.4.

Considérons le système mécanique représenté par la Figure 1.3 décrivant le problème de positionnement d'une bille sur une barre. On suppose que la bille effectue uniquement un déplacement linéaire sans rotation sur son centre de masse et que toutes les forces de frottement sont nulles.

En utilisant la méthode de Newton-Euler, le modèle dynamique de la bille peut être décrit par :

$$m \ddot{x} = mg \sin \alpha \quad (1.6)$$

avec :

$x$  : position de la bille sur la barre ;

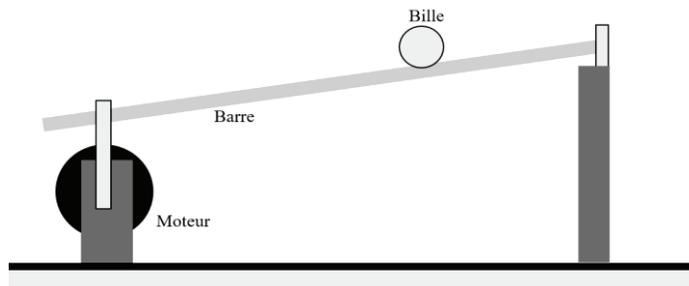
$m$  : masse de la bille ;

$\alpha$  : position angulaire de la barre par rapport à l'horizontal ;

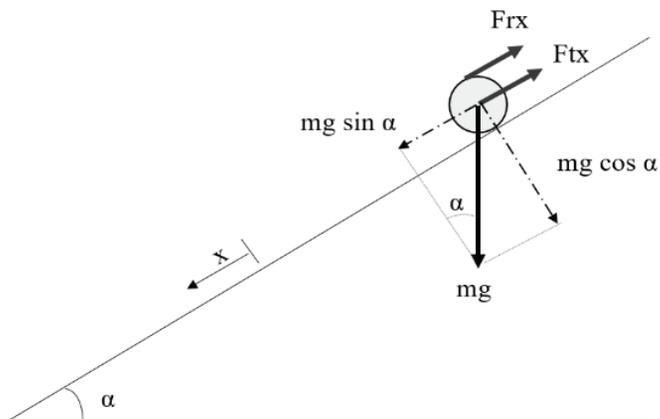
$g$  : accélération de la pesanteur ;

$F_{tx}$  : force de frottement en translation ;

$F_{rx}$  : force de frottement en rotation.



(a)



(b)

**Figure 1.3.** Positionnement d'une bille sur une barre :  
(a) maquette ; (b) schéma synoptique.