Apprendre à raisonner

MATHS

4e

Mathieu Kieffer

ellipses

1

Nombres relatifs Multiplication et division

1.1 Produit de deux nombres relatifs

L'idée est d'étendre la multiplication aux nombres relatifs de telle façon que la multiplication des nombres relatifs conserve les mêmes propriétés que la multiplication des nombres entiers naturels. Par exemple, on voudrait, de manière naturelle, que la multiplication des nombres entiers relatifs soit également distributive par rapport à l'addition (cf. cours de Cinquième). Concrètement, comment définir le produit d'un nombre entier positif par un nombre entier négatif, par exemple $(+3)\times(-4)$? Pour que la multiplication des nombres entiers relatifs soit distributive par rapport à l'addition, il est nécessaire de pouvoir écrire l'enchaînement suivant :

$$\begin{aligned}(-4)+(+4)&=0\\(+3)\times((-4)+(+4))&=(+3)\times 0\\\underbrace{(+3)\times(-4)}+\underbrace{(+3)\times(+4)}&=0 \longleftarrow \text{ distributivité}\end{aligned}$$

Donc, par définition, $(+3)\times(-4)$ doit être égal à l'opposé de $(+3)\times(+4)$. Or $(+3)\times(+4)=+12$. Ainsi, nous poserons $(+3)\times(-4):=-12$.

À présent, cherchons à définir le produit de deux nombres entiers négatifs, par exemple $(-3)\times(-4)$. On souhaite :

$$\begin{aligned}(-4)+(+4)&=0\\(-3)\times((-4)+(+4))&=(-3)\times 0\\\underbrace{(+3)\times(-4)}+\underbrace{(-3)\times(+4)}&=0 \longleftarrow \text{ distributivité}\end{aligned}$$

Donc, par définition, $(-3)\times(-4)$ doit être égal à l'opposé de $(-3)\times(+4)$. Or $(-3)\times(+4)=-12$. Ainsi, nous poserons $(-3)\times(-4):=12$.

Remarque. Nous pouvons alors étendre ces remarques aux nombres relatifs non entiers et obtenir la proposition suivante :

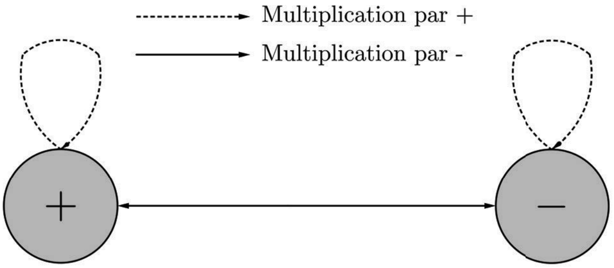
Proposition 1. *Le produit de deux nombres relatifs est un nombre relatif dont la valeur absolue est égale au produit des valeurs absolues des deux facteurs et dont le signe est positif, si les deux nombres sont de même signe, et négatif, si les deux nombres sont de signe contraire.*

Démonstration. Admise. □

Remarque. Nous pourrons retenir le tableau de signes suivant :

$\times$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

ou encore le graphe des signes suivant :



Exercice. Voici la table de multiplication des nombres entiers relatifs :

$\ddots$						$\vdots$						$\iddots$
	-25	-20	-15	-10	-5	5	5	10	15	20	25	
	-20	-16	-12	-8	-4	4	4	8	12	16	20	
	-15	-12	-9	-6	-3	3	3	6	9	12	15	
	-10	-8	-6	-4	-2	2	2	4	6	8	10	
	-5	-4	-3	-2	-1	1	1	2	3	4	5	
$\dots$	-5	-4	-3	-2	-1	$\times$	1	2	3	4	5	$\dots$
	5	4	3	2	1	-1	-1	-2	-3	-4	-5	
	10	8	6	4	2	-2	-2	-4	-6	-8	-10	
	15	12	9	6	3	-3	-3	-6	-9	-12	-15	
	20	16	12	8	4	-4	-4	-8	-12	-16	-20	
	25	20	15	10	5	-5	-5	-10	-15	-20	-25	
$\iddots$						$\vdots$						$\ddots$

Remarque. Quelles symétries pouvez-vous déceler dans cette table de multiplication ? Savez-vous les expliquer ?

Proposition 2. *Soient a, b et c trois nombres relatifs. On a :*

1. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ *(associativité de $\times$)*
2. $a \times b = b \times a$ *(commutativité de $\times$)*
3. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ *(distributivité de $\times$ par rapport à $+$)*
4. $1 \times a = a$ *(1 est élément neutre pour $\times$)*
5. $0 \times a = 0$ *(0 est absorbant)*

Démonstration. Admise. □

Exemple. Voici quelques exemples :

1. $\begin{cases} (-5) \times [(+6) \times (-2)] = -5 \times (-12) = 60 \\ [(-5) \times (+6)] \times (-2) = (-30) \times (-2) = 60 \end{cases}$
2. $(-11,2) \times (-4) = (-4) \times (-11,2) = 44,8$
3. $-7 \times (13 - 5) = -7 \times 13 - 7 \times (-5) = -91 + 35 = -56$
4. $1 \times (-2\,024) = -2\,024$
5. $0 \times (-2\,024) = 0$

1.2 Quotient de deux nombres relatifs

Définition 3. Soient a et b deux nombres relatifs avec $b \neq 0$. On appelle quotient de a par b, noté $\frac{a}{b}$, le nombre x dont le produit par b est égal à a. Autrement, $\frac{a}{b}$ est l'unique solution de l'équation $x \times b = a$.

Exemple. Voici quelques exemples de quotients :

1. $\frac{5}{7}$ est le quotient de 5 par 7. En effet, $\frac{5}{7} \times 7 = 5$.
2. $\frac{2\,024}{-4}$ est le quotient de $2\,024$ par -4. En effet, $\frac{2\,024}{-4} \times (-4) = 2\,024$.
3. $\frac{-42}{6}$ est le quotient de -42 par 6. En effet, $\frac{-42}{6} \times 6 = -42$.
4. $\frac{-35,5}{-5}$ est le quotient de $-35,5$ par 5. En effet, $\frac{-35,5}{5} \times 5 = -35,5$.

Remarque. Certains quotients peuvent s'exprimer plus simplement. Par exemple, le quotient de $2\,024$ par 4 qui se note $\frac{2\,024}{4}$, n'est rien d'autre que 506 d'après le cours de Sixième.

Proposition 4. *Le quotient de deux nombres relatifs est un nombre relatif dont la valeur absolue est le quotient des valeurs absolues du dividende et du diviseur et dont le signe est positif, si le dividende et le diviseur sont de même signe, et négatif, s'ils sont de signe contraire.*

Démonstration. Découle de la proposition 1 et de la définition 3. □

Remarque. La division d'un nombre a quelconque par 0 n'est pas définie. En effet, s'il existait un nombre x tel que $\frac{a}{0} = x$, alors, d'après la définition 3, on aurait $0 \times x = a$ et par conséquent $a = 0$ d'après la proposition 2. Or a n'était pas nécessairement nul. D'où la contradiction.

1.3 Exercices

Exercice 1

Emma choisit trois nombres distincts a, b et c de l'ensemble $\{-7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 6\}$. Quelle est la valeur maximale de l'expression algébrique $ab + c$ qu'elle est en droit d'espérer ?

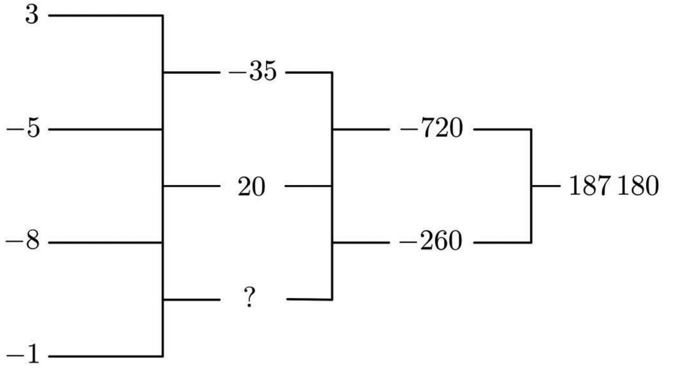
Exercice 2

Voici quelques opérations étranges :

1. Pour tous nombres x et y, on définit $\spadesuit(x; y) \coloneqq x - \frac{1}{y}$. Calculer $\spadesuit(-3; -2)$.
2. Pour tous nombres x et y, on définit $\widetilde{x} \coloneqq x^2$ et $x \clubsuit y \coloneqq x - 2y$. Calculer $\widetilde{-5} \clubsuit \widetilde{-9}$.
3. Pour tous nombres x et y, on définit $x \blacklozenge y \coloneqq xy - 2$. Combien de « 1 » comporte l'égalité $(((1 \blacklozenge 1) \blacklozenge 1) \blacklozenge \ldots \blacklozenge 1) \blacklozenge 1 = -2\,023$?

Exercice 3

Quel est le nombre manquant au sein de ce graphe ?



Exercice 4

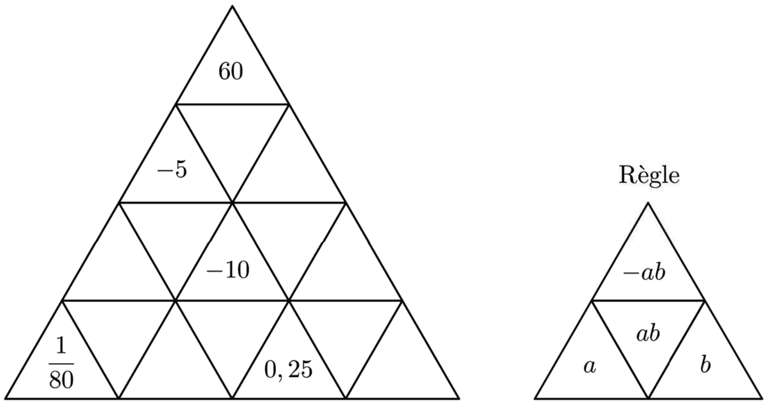
Pour traverser la salle du trésor carrée ci-dessous, Clément peut passer d'une case à l'autre soit en allant vers l'Est, ce qui correspond à une addition, soit en allant vers le Nord, ce qui correspondant à une multiplication.

		NORD		
	-7	-8	-9	$\longrightarrow$ Sortie
OUEST	-4	-5	-6	EST
Entrée $\longrightarrow$	-1	-2	-3	
		SUD		

Quel chemin Clément doit-il emprunter pour maximiser son butin ?

Exercice 5

Compléter :



1.4 Corrigés

Exercice 1

Les deux nombres les plus grands en valeur absolue sont -7 et 6, mais leur produit est négatif. La plus grande valeur possible du produit ab est donc $(-7) \times (-5) = 35$. En outre, la plus grande valeur possible pour c est 6. Par conséquent la valeur maximale de $ab + c$ est $(-7) \times (-5) + 6 = 41$.

Exercice 2

1. $\spadesuit(-3;-2) = -3 - \frac{1}{-2} = -3 + \frac{1}{2} = -2,5$
2. $\widetilde{-5}\clubsuit\widetilde{-9} = (-5)^2\clubsuit(-9)^2 = 25 - 2 \times 81 = -137$
3. $\begin{cases} 1\blacklozenge 1 = 1 \times 1 - 2 = -1 & (1) \\ -1\blacklozenge 1 = -1 \times 1 - 2 = -3 & (2) \\ -3\blacklozenge 1 = -3 \times 1 - 2 = -5 & (3) \\ -5\blacklozenge 1 = -5 \times 1 - 2 = -7 & (4) \\ \vdots & \vdots \\ -2\,021\blacklozenge 1 = -2\,021 \times 1 - 2 = -2\,023 & (1\,012) \end{cases}$

On remarque que le numéro de l'étape est égale au quotient, de la somme de l'opposé du résultat et de un, par deux. Par conséquent, l'égalité $(((1 \blacklozenge 1) \blacklozenge 1) \blacklozenge \ldots \blacklozenge 1) \blacklozenge 1 = -2\,023$ compte $1\,013$ « 1 ».

Exercice 3

On remarque que $-35 = 3 \times (-5) - 20$, $20 = (-5) \times (-8) - 20$, $-720 = (-35) \times 20 - 20$ et $187\,180 = (-720) \times (-260) - 20$. D'où $(-8) \times (-1) - 20 = -12$. On vérifie alors que $20 \times (-12) - 20 = -260$. Donc une solution pourrait être $? = -12$. Cela n'élimine toutefois pas d'autres possibilités plus alambiquées...

Exercice 4

Le meilleur chemin que Clément puisse emprunter est le suivant :

		NORD		
	-7	-8	-9	$\longrightarrow$ Sortie
OUEST	-4	-5	-6	EST
Entrée $\longrightarrow$	-1	-2	-3	
		SUD		

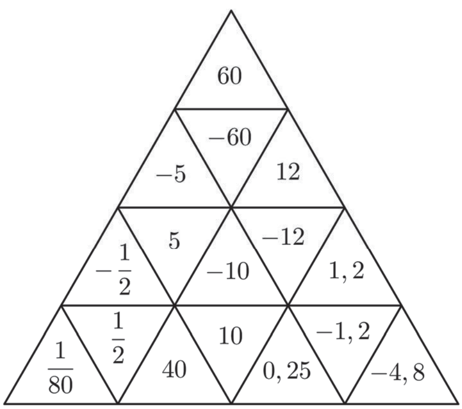
Voici les calculs associés à ce chemin :

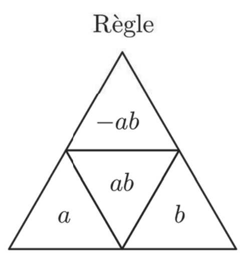
$$\begin{cases} -1 \times (-4) = 4 \\ 4 + (-5) = -1 \\ -1 + (-6) = -7 \\ -7 \times (-9) = 63 \end{cases}$$

Ces calculs pouvant se résumer à l'expression algébrique suivante :

$$[-1 \times (-4) + (-5) + (-6)] \times (-9) = 63$$

Exercice 5





2

Théorème de Pythagore

2.1 Racine carrée d'un nombre

Définition 5. Soit a un nombre positif ou nul. Alors il existe un unique nombre x, positif ou nul, tel que $x^2 = a$. Ce nombre, noté $\sqrt{a}$, est appelé la racine carrée de a. Plus formellement, pour tout nombre positif a, on a l'équivalence suivante :

$$(x = \sqrt{a}) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 = a \\ x \geqslant 0 \end{cases} \right)$$

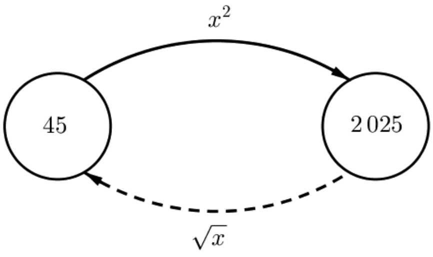
Exemple. Voici quelques exemples de racines carrées :
$\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Remarque. Nous pouvons effectuer quatre remarques :

1. La racine carrée d'un nombre est toujours positive.
2. Lorsque la racine carrée d'un nombre est entière, on dit que ce nombre est un carré parfait. Voici la liste des premiers carrés parfaits et de leur racine carrée :

Carré parfait	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...
Racine carrée	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

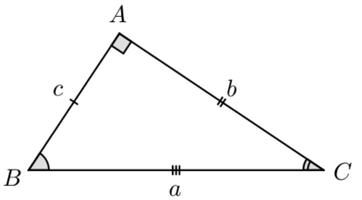
3. Nous ne pouvons pas extraire la racine carrée d'un nombre négatif. En effet, quel serait ce nombre qui, multiplié par lui-même, est égal à un nombre négatif ? Le chapitre 1 nous fait perdre tout espoir quant à l'existence de ce nombre.
4. Dans une première approximation, nous pourrons retenir que le passage à la racine carrée est « l'opération » inverse de l'élévation au carré :



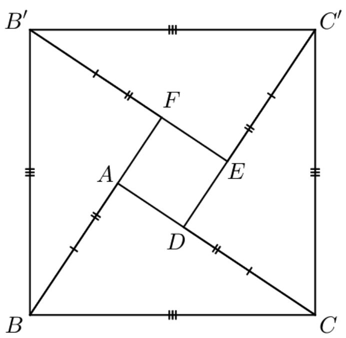
2.2 Théorème de Pythagore

Théorème 6. *(Théorème de Pythagore) Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (appelés cathètes).*

Démonstration. (Due à Bhaskara [1]) Soit ABC un triangle rectangle en A. On pose $a := BC$, $b := AC$ et $c := AB$.



On place quatre triangles égaux à ABC comme indiqué sur la figure ci-dessous :



1. Démontrons tout d'abord que le quadrilatère $BCC'B'$ est un carré.
   On a $\widehat{BCC'} = \widehat{BCA} + \widehat{ACC'}$. Or $\widehat{ACC'} = \widehat{DCC'} = \widehat{ABC}$. D'où $\widehat{BCC'} = \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 90°$ d'après le cours de Cinquième. De la même façon, on démontre que $\widehat{B'BC} = \widehat{C'B'B} = \widehat{CC'B} = 90°$. De plus on a $BC = CC' = C'B' = B'B$ par construction. Ainsi, par définition, $BCC'B'$ est un carré.

1. Bhaskara est un mathématicien indien du XII^{e} siècle après J.-C.