Jonathan Rotge

2de

Mathématiques

Pour un accompagnement personnalisé

42 fiches

250 exercices corrigés

14 QCM bilan

ellipses

Chapitre 1

Manipuler les nombres réels

Fiche 1.1 – Ensembles de nombres $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

→ Découvrir les nombres décimaux, rationnels et réels
→ Savoir déterminer des encadrements et des arrondis
→ Évaluer l'appartenance d'un nombre à un ensemble

Fiche 1.2 – Intervalles

→ Différencier les notions d'ensemble et d'intervalle
→ Savoir représenter graphiquement un intervalle
→ Résoudre une inéquation par un intervalle

Fiche 1.3 – Valeurs absolues

→ Relier les notions de distance et de valeur absolue
→ Manipuler une inégalité avec une valeur absolue
→ Traduire une telle inégalité par un intervalle

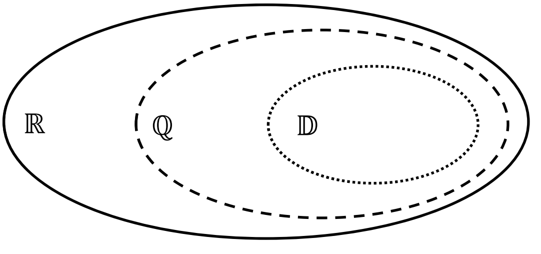
Fiche 1.1 – Ensembles de nombres $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

- Un nombre est dit **décimal** s'il possède un nombre fini de chiffres après la virgule. L'ensemble de tous les nombres décimaux sera noté $\mathbb{D}$.
- Un nombre est dit **rationnel** s'il peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux nombres entiers relatifs. L'ensemble de tous les nombres rationnels sera noté $\mathbb{Q}$.
- Un nombre est dit **réel** s'il possède une partie entière et un nombre fini ou infini de chiffres après la virgule. L'ensemble de tous les nombres réels sera noté $\mathbb{R}$.

Propriété – Tout nombre décimal est rationnel. On notera $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ (« $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ »).

En effet, si $x \in \mathbb{D}$, il possède un nombre fini de chiffres après la virgule que nous noterons n. Alors, x peut s'écrire sous la forme $x = \frac{p}{10^n}$ où p est un entier relatif.

Propriété – Tout nombre rationnel est réel. On notera $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



- Tout nombre réel x peut être encadré par deux nombres décimaux a et b, avec $a < b$. On appelle **amplitude** de l'encadrement la valeur $b - a$. Généralement, cette amplitude est une puissance de 10.
- On appelle **arrondi à $\mathbf{10^{-n}}$** de x, la valeur la plus proche de x parmi a et b, avec $b - a = 10^{-n}$.

Méthode – Afin de déterminer à quel ensemble appartient un nombre, il faut analyser son écriture. Pour cela, il faut :

- Simplifier au maximum son écriture (réduire les fractions, simplifier les racines carrées, effectuer toutes les opérations, …)
- Regarder la partie décimale : si elle est finie, le nombre est décimal, si elle est infinie et présente un motif qui se répète (par exemple $1{,}237237237\ldots$) le nombre est rationnel, si elle ne présente aucun motif, le nombre est probablement réel non rationnel.

Les exemples

- Les nombres $2{,}143$; $-26{,}002$ et 46 sont des exemples de nombres **décimaux**. En effet, leurs parties décimales sont toutes finies. En particulier, on peut les écrire sous la forme de fractions :

  $$2{,}143 = \frac{2143}{1000} \qquad -26{,}002 = -\frac{26\,002}{1000} \qquad 46 = \frac{46}{1}$$

  Cette remarque permet notamment de justifier que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

- Les nombres $\frac{1}{3}, -\frac{13}{7}$ et $\frac{1}{2}$ sont des exemples de nombres **rationnels**. Par ailleurs, le nombre $\frac{1}{3} = 0{,}33$ ... possède un nombre infini de chiffres après la virgule. C'est donc un nombre rationnel non décimal. On remarque également, que tous ces nombres sont réels. On a donc bien $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- Les nombres π et $\sqrt{2}$ sont des exemples de nombres réels non rationnels : on ne peut pas les écrire sous la forme d'un quotient. On les qualifie de nombres **irrationnels**. En particulier, si on tente de calculer une valeur approchée de ces nombres sur la calculatrice, on obtient :

  $$\pi \approx 3{,}14159265358 \qquad \sqrt{2} \approx 1{,}141213562$$

  Aucun motif particulier ne semble apparaître dans l'écriture décimal de ces deux nombres, cela justifie en partie que ces nombres ne sont pas rationnels.

- Un encadrement d'**amplitude** 10^{-2} de π est :

  $$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$

  L'**arrondi** de π à 10^{-2} (au centième) est $3{,}14$.

L'essentiel à retenir

Le schéma de la page précédente se traduit par les inclusions suivantes :

$$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Notation : L'ensemble des nombres réels privé de 0 se note :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Notation : L'ensemble des nombres réels positifs ou nul se note :

$$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

Les exercices

✍ **Exercice 1**

Sur une droite graduée (unité : 1 cm), placer le plus précisément possible : en rouge les nombres décimaux, en vert les nombres rationnels non décimaux et en bleu les nombres irrationnels.

$$S = \frac{1}{8} \qquad U = -\frac{\pi}{2} \qquad J = -\frac{15}{7} \qquad E = \sqrt{0{,}49} \qquad T = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

✍ **Exercice 2**

Voici une méthode pour déterminer si un nombre rationnel x est décimal ou non.

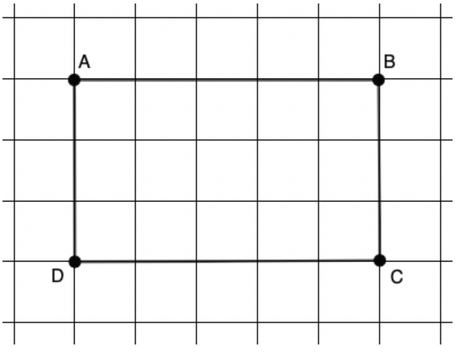
Première étape : Écrire x sous la forme d'une fraction *irréductible* $x = \frac{p}{q}$.

Deuxième étape : Si le dénominateur q n'admet que 2 et 5 comme diviseurs premiers alors x est décimal. Sinon, il n'est pas décimal. Déterminer ainsi les nombres décimaux parmi ceux de la liste suivante :

$$\frac{14}{12} \qquad \frac{26}{10} \qquad -\frac{27}{18} \qquad \frac{2\,789}{8} \qquad -\frac{1}{14}$$

✍ **Exercice 3**

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 5$ cm et $AD = 3$ cm.



1. Reproduire la figure ci-dessus sur une feuille blanche.
2. Déterminer la mesure exacte de la diagonale d de ce rectangle à l'aide du théorème de Pythagore.
3. Déterminer à quel ensemble appartient le nombre d.
4. Proposer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de d.
5. En déduire un arrondi à 10^{-3} de d.

✍ **Exercice 4**

Dans cet exercice, on se demande quel est l'effet d'opérations sur la nature des nombres. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, proposer une justification rapide, si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. La somme de deux nombres décimaux est toujours décimale.
2. La somme de deux nombres rationnels non décimaux est rationnelle non décimale.
3. Le produit de deux nombres rationnels non décimaux est rationnel non décimal.
4. La somme de deux nombres irrationnels est irrationnelle.
5. Le produit de deux nombres irrationnels est irrationnel.

✍ **Exercice 5**

Encadrer par deux nombres entiers consécutifs les nombres irrationnels ci-dessous :

$$\sqrt{57} \qquad\qquad 4+\sqrt{2} \qquad\qquad 3\pi+6$$

✍ **Exercice 6***

On choisit x, y deux nombres décimaux. On les écrit sous la forme :

$$x = \frac{p}{10^n} \qquad\qquad y = \frac{q}{10^m}$$

1. Calculer puis simplifier le nombre $z = xy$.
2. Mettre z sous la forme $\frac{r}{10^k}$ où r et k devront être exprimés en fonction de p, q, n et m.
3. En déduire que le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
4. **Application** : Mettre les nombres $x = 12{,}65$ et $y = -3{,}4$ sous la forme d'une fraction décimale. En déduire l'écriture du produit xy sous la forme d'une fraction décimale.

Les corrigés

✍ **Exercice 1**

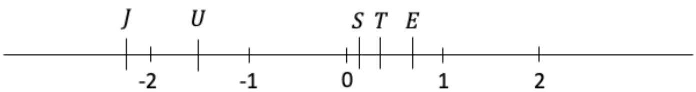
Il est préférable de commencer par simplifier au maximum les différents nombres proposés, lorsque c'est possible. On obtient ainsi :

$$E = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7 \qquad T = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{3\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3} \qquad S = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

On peut alors regrouper dans un tableau les nombres selon leur nature :

Nombres décimaux	Nombres rationnels	Nombres irrationnels
S, E	J, T	U

On place ensuite ces nombres sur une droite graduée :



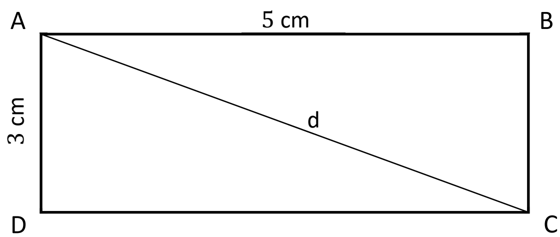
✍ **Exercice 2**

Pour chaque fraction, on décompose en produits de facteurs premiers le numérateur et le dénominateur, afin de la rendre irréductible.

$\frac{14}{12} = \frac{\cancel{2}\times 7}{\cancel{2}\times 2\times 3} = \frac{7}{6}$; 6 étant divisible par 3, ce n'est pas un nombre décimal.
$\frac{26}{10} = \frac{\cancel{2}\times 13}{\cancel{2}\times 5} = \frac{13}{5}$; 5 n'étant divisible que par 5, c'est un nombre décimal.
$-\frac{27}{18} = -\frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times 3}{2\times\cancel{3}\times\cancel{3}} = -\frac{3}{2}$; 2 n'étant divisible que par 2, c'est un nombre décimal.
$\frac{2\,789}{8}$ est déjà irréductible car 2 789 est un nombre premier. Or, 8 n'est divisible que par 2, c'est donc un nombre décimal.
$-\frac{1}{14}$ est déjà irréductible. Or, 14 est divisible par 7, ce n'est donc pas un nombre décimal.

✍ **Exercice 3**

1.



2. Le triangle ABC est rectangle en B, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Or, $BC = AD = 3$ cm et $AC = d$. L'égalité de Pythagore devient alors : $5^2 + 3^2 = d^2$. On en déduit $d = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ cm.
3. À la calculatrice, on obtient la valeur approchée $d \approx 5{,}830951895$. Ce nombre comporte un nombre infini de chiffres après la virgule, sans motif qui semble se répéter. On peut donc conjecturer que d est donc un nombre irrationnel.
4. À l'aide de la calculatrice, on obtient l'encadrement au millième $0{,}830 \leq d \leq 0{,}831$.
5. On regarde le chiffre des dix-millièmes qui est 9, on choisit donc l'arrondi au millième supérieur. Ainsi, $d \approx 0{,}831$.

✍ **Exercice 4**

1. C'est vrai, si deux nombres ont une partie décimale finie, la partie décimale de leur somme sera également finie.
2. C'est faux, par exemple $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ sont rationnels non décimaux, mais leur somme vaut 1 qui est un nombre entier (donc en particulier décimal).
3. C'est faux, par exemple $\frac{7}{3}$ et $\frac{3}{7}$ sont rationnels non décimaux, mais leur produit vaut 1 qui est un nombre entier (donc en particulier décimal).
4. C'est vrai car la partie décimale de la somme de deux nombres irrationnels n'aura pas de motif qui se répète.
5. C'est faux, par exemple $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ et 2 est un entier (donc un rationnel).

✍ **Exercice 5**

On sait que $\sqrt{49} = 7$ et $\sqrt{64} = 8$, donc $7 < \sqrt{57} < 8$ puisque 57 est compris entre 49 et 64.
On sait que $1 < \sqrt{2} < 2$, on peut donc ajouter 4 à tous les membres de l'inégalité pour obtenir l'encadrement $5 < 4 + \sqrt{2} < 6$.
On sait que $3{,}1 < \pi < 3{,}2$, donc $9 < 9{,}3 < 3\pi < 9{,}6 < 10$ et donc, en ajoutant 6 à tous les membres de l'inégalité : $15 < 3\pi + 6 < 16$.

✍ **Exercice 6***

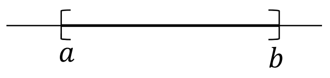
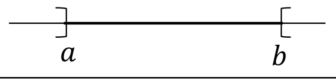
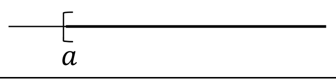
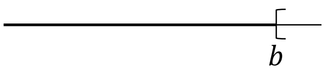
1. On a : $z = xy = \frac{p}{10^n} \cdot \frac{q}{10^m} = \frac{pq}{10^n \cdot 10^m} = \frac{pq}{10^{n+m}}$.
2. On pose $r = pq$ et $k = n + m$. On a alors $z = \frac{r}{10^k}$.
3. On a obtenu une écriture de z sous la forme d'une fraction décimale, c'est donc un nombre décimal.
4. On a : $x = \frac{1\,265}{10^2}$ et $y = \frac{-34}{10^1}$. On a donc $r = 1\,265 \times (-34) = -43\,010$ et $k = 2 + 1 = 3$. Ainsi, $xy = \frac{43\,010}{10^3}$.

Corrigés

Fiche 1.2 – Intervalles

- Une **équation** possède généralement un nombre **fini** de solutions. On représente alors les solutions sous la forme d'un ensemble $\mathcal{S}$ délimité par des accolades : {}

- Une **inéquation** possède le plus souvent un nombre **infini** de solutions. On ne peut pas toutes les expliciter, on représentera les solutions sous la forme d'un **intervalle** $\mathcal{S}$ délimité par des crochets : []

Modèle d'inégalité	**Représentation graphique**	**Intervalle**
$\boldsymbol{a \leq x \leq b}$		$x \in [a\,;b]$
$\boldsymbol{a < x < b}$		$x \in]a\,;b[$
$\boldsymbol{a \leq x}$		$x \in [a\,;+\infty[$
$\boldsymbol{x < b}$		$x \in]-\infty\,;b[$

- Le symbole « $\leq$ » signifie « **inférieur ou égal** », dans ce cas les bornes sont **incluses** dans l'intervalle. Ceci sera indiqué par un crochet **fermé** (c'est-à-dire tourné vers l'intérieur).

- Le symbole « $<$ » signifie « **strictement inférieur** », dans ce cas les bornes sont **exclues** de l'intervalle. Ceci sera indiqué par un crochet **ouvert** (c'est-à-dire tourné vers l'extérieur).

- Lorsque l'inéquation ne possède pas de borne inférieure (resp. supérieure) toutes les valeurs à gauche de l'intervalle (resp. à droite) sont incluses. On l'indique par le symbole $-\infty$ (resp. $+\infty$). Dans ce cas, le crochet est toujours ouvert (l'infini n'est pas un nombre).

  Méthode – Afin de déterminer si un nombre x appartient à un intervalle $I = [a, b]$, on le compare aux bornes de cet intervalle. Dans ce cas, si $x < a$ ou $x > b$ alors x n'appartient pas à l'intervalle I. On écrit alors $x \notin I$.