Tle

Nicolas Nguyen
Stéphane Daniel
Stéphane Dutailly
Michaël Meyroneinc-Condy
Éric Pétrequin

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

SPÉCIALITÉ MATHS

3e édition

- Résumé de cours
- Démonstrations
- Approfondissements, algorithmes
- Méthodes
- Vrai/Faux
- Exercices avec indications
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

Chapitre 1
Combinatoire et dénombrement

La combinatoire regroupe les procédés de décompte de différentes configurations dans le cadre d'ensembles finis : nombre de façons de choisir des éléments, etc. Elle trouve donc toute sa place dans le domaine du calcul des probabilités mais aussi en arithmétique et en géométrie.

Un mathématicien

Blaise **Pascal** (1623-1662) est un philosophe mystique mais aussi un grand mathématicien. Dès l'âge de quatorze ans, il participe avec son père aux réunions savantes organisées par un érudit, Marin **Mersenne**. Incroyablement précoce, il écrit dès l'âge de seize ans un ouvrage sur les courbes. Il s'intéresse à la combinatoire pour résoudre des problèmes énoncés dans des courriers échangés avec Pierre **de Fermat**. Ceci l'amène à écrire en 1653 un *Traité du triangle arithmétique,* notion qui porte désormais son nom.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour placer 8 personnes autour d'une table de 8 places, il existe $8\,! = 40\,320$ façons de le faire. En revanche, pour placer 8 enfants faisant une ronde fermée en se tenant par la main, il n'y en a plus que $7\,! = 5\,040$ manières. En effet, le premier enfant peut être placé où l'on veut. Ceci se généralise facilement au cas de n personnes avec $n\,!$ façons de placer les gens autour de la table et $(n-1)\,!$ de former une ronde de n enfants. Rappelons que le produit $n\,! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n$ s'appelle « factorielle n ».

COMPÉTENCES

les incontournables

- Dénombrer suivant le principe additif
- Dénombrer suivant le principe multiplicatif
- Dénombrer les parties d'un ensemble à n éléments
- Dénombrer les k-uplets d'un ensemble à n éléments
- Dénombrer les combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments
- Connaître et utiliser le triangle de Pascal

et plus si affinités

- Calculer la somme de termes consécutifs
  - dans le cas d'une suite arithmétique
  - dans le cas d'une suite géométrique

Résumé de cours

Opérations sur les ensembles

Ensembles et parties

Définition : *Un **ensemble** A est une collection d'objets, appelés **éléments** de A. Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. L'**ensemble vide** est l'ensemble qui n'a aucun élément.*

Notation : *a élément de A sera noté $a \in A$. L'ensemble vide est noté $\varnothing$.*

Définition : *Une **partie** B d'un ensemble A est un ensemble d'éléments de A. Si B est une partie de A, on dit que B est inclus dans A.*

Notation : *B inclus dans A sera noté $B \subset A$. L'**ensemble des parties** de A sera noté $\mathscr{P}(A)$.*

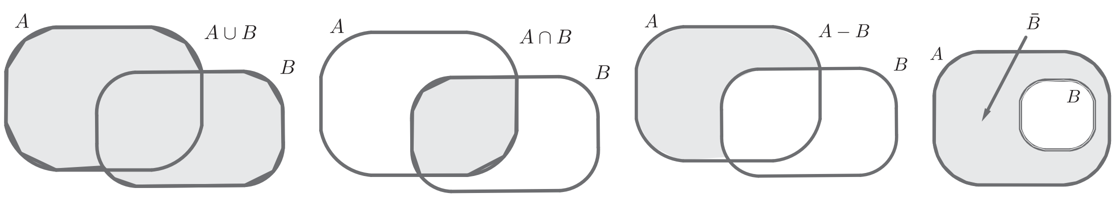
Remarques :

- $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.
- L'ensemble A lui-même et l'ensemble vide $\varnothing$ sont des parties de A.

Opérations ensemblistes

Définition : *Soit A et B deux ensembles.*

- *La **réunion** de A et B, notée $A \cup B$ est l'ensemble des objets qui appartiennent à A **ou** à B.*
- *L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble des objets qui appartiennent à la fois à A **et** à B.*
- *La **différence** de A et B, noté $A - B$ est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.*
- *Si B est une partie de A, le **complémentaire** de B dans A, noté $\overline{B}$ est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.*



Vocabulaire : *Deux parties d'un ensemble sont **disjointes** lorsque leur intersection est vide.*

Définition : *On appelle **couple** (a, b) la suite formée de deux objets : le premier est a, le second est b.*
*Si A et B sont deux ensembles, le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.*

Plus généralement, un **k-uplet** est une suite de k objets. Le **produit cartésien** $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ est l'ensemble des k-uplets dont le j^{ieme} objet est un élément de A_j pour $j \in [\![1, k]\!]$.
En particulier $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k}$ noté A^k est le produit cartésien de A par lui-même k fois. Les éléments de A^k sont des k-uplets d'éléments de A.

■ Dénombrement

Définition : *Étant donné un ensemble fini A, on appelle **cardinal** de A le nombre d'éléments de A, on note* Card $(A) = n$ *cet entier.* ***Dénombrer*** *un ensemble, c'est calculer son nombre d'éléments. Ainsi* Card $(\varnothing) = 0$.

Réunions d'ensembles

Théorème 1.1.— Si A et B sont deux ensembles disjoints alors

$$\boxed{\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } (A) + \text{Card } (B)}$$

Proposition 1.2.— Soit A et B sont deux ensembles quelconques alors

$$\boxed{\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } (A) + \text{Card } (B) - \text{Card } (A \cap B)}$$

Proposition 1.3.— Soit A et B deux ensembles quelconques.

- Si $B \subset A$ alors Card $(\overline{A}) = \text{Card } (A) - \text{Card } (B)$.
- Si A et B sont deux ensembles quelconques alors Card $(A - B) = \text{Card } (A) - \text{Card } (A \cap B)$.

Théorème 1.4.— Principe additif —. Soit $A_1, \ldots, A_k$ des ensembles deux à deux disjoints.

$$\boxed{\text{Card } (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \text{Card } (A_1) + \text{Card } (A_2) + \cdots + \text{Card } (A_k) = \sum_{j=1}^{k} \text{Card } (A_j)}$$

Produits cartésiens d'ensembles finis

Théorème 1.5.— Si A et B sont deux ensembles quelconques

$$\boxed{\text{Card } (A \times B) = \text{Card } (A) \times \text{Card } (B)}$$

Théorème 1.6.— Principe multiplicatif —. Soit $A_1, \ldots, A_k$ des ensembles quelconques.

$$\boxed{\text{Card } (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = \text{Card } (A_1) \times \text{Card } (A_2) \times \cdots \times \text{Card } (A_k)}$$

Corollaire 1.7.— Si A est un ensemble quelconque alors

$$\boxed{\text{Card } (A^k) = \text{Card } (A)^k}$$

Parties d'un ensemble fini à n éléments

Théorème 1.8.— Soit A un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de A est

$$\boxed{\text{Card } (\mathscr{P}(A)) = 2^n}$$

Remarque : une partie d'un ensemble à n éléments compte toujours moins de n éléments.

Théorème 1.9.— Le nombre de parties de k éléments d'un ensemble à n éléments est

$$\boxed{\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 1}}$$

Notation : *Soit n et k deux entiers,*

$\binom{n}{k}$ *est le nombre* $\dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 1}$ *lorsque* $0 \leqslant k \leqslant n$ *et vaut* 0 *sinon.*

Remarque : si $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \dfrac{\text{produit de } k \text{ entiers consécutifs à partir de } n}{\text{produit de } k \text{ entiers consécutifs à partir de } 1}$.

Interprétation : nous rencontrons très souvent $\binom{n}{k}$. C'est le nombre de :

- n-uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$ contenant k zéros
- mots de longueur n sur un alphabet à deux lettres contenant k fois la même lettre
- chemins dans un arbre binaire (A ou B) à n niveaux contenant k nœuds A
- façons de réaliser k succès dans un schéma de Bernoulli à n essais

Toutes ces situations se ramènent à dénombrer le nombre de parties de k éléments dans un ensemble à n éléments : le choix de k positions parmi n positions possibles.

■ Analyse combinatoire

Modèle : Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à la question du nombre de façons de choisir k objets dans un ensemble, E_n qui en contient n. Deux questions se posent :

- Le choix est-il ordonné ou non ordonné ?
- Le choix se fait sans répétition possible ou avec répétition ?

Choix ordonnés avec ou sans répétition : les k-uplets

Définition : *Si k est un entier naturel, une k-**liste** ou k-**uplet** est une suite de k objets. Si ces objets sont des éléments d'un même ensemble A, on dira qu'il s'agit d'une k-liste de A.*

Remarque : un couple est une 2-liste. Un triplet est une 3-liste. Un quadruplet est une 4-liste.

Théorème 1.10.— Soit E_n un ensemble à n éléments. Le nombre de k-listes de E_n est

$$\boxed{\text{Card } \left(A^k\right) = n^k}$$

Définition : *Soit E_n un ensemble à n éléments. Une k-liste d'éléments **distincts** de E_n, est un **arrangement** de k éléments de E_n parmi n.*

Théorème 1.11.— Soit n et k deux entiers et E_n un ensemble à n éléments. Le nombre de k-listes d'éléments distincts de E_n, est

$$\boxed{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}$$

Définition : *Soit n un entier et E_n un ensemble à n éléments. Une collection ordonnée de k éléments distincts de E_n est un* ***arrangement*** *de k éléments parmi n. Une* ***permutation*** *de E_n est arrangement des n éléments de E_n.*

Définition : *Soit $n \in \mathbb{N}$. La* ***factorielle*** *de n est le nombre $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ pour $n \geqslant 1$. On le note $n!$. On convient que $0! = 1$.*

Remarque : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ et $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Théorème 1.12.— Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit E_n un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E_n, est le nombre :

$$\boxed{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1}$$

Choix non ordonnés avec ou sans répétition : les combinaisons

Définition : *Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ et E_n un ensemble à n éléments. Une* ***combinaison*** *de k éléments de E_n est une partie de E_n à k éléments.*

Théorème 1.13.— Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est $\binom{n}{k}$.

Remarque : si $k > n$, il n'existe pas de combinaisons de k objets de E_n.

Propriétés des coefficients binomiaux

Théorème 1.14.— Soit n et k deux entiers naturels.

$$\boxed{\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \bullet \binom{n}{1} = n \quad \bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \bullet \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}$$

Interprétation : la dernière égalité s'appelle la **relation de Pascal**. On peut la visualiser sous la forme du **triangle de Pascal** ci-contre dans lequel le coefficient $\binom{n}{k}$ est inscrit en n-ième ligne et k-ième colonne, pour $1 \leqslant n \leqslant 6$ et $0 \leqslant k \leqslant 6$.

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Théorème 1.15.— Soit n et k deux entiers naturels.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

Démonstrations

Théorème 1.14.— Relation de Pascal

$$\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}$$

Démonstration ▽

Nous fournirons deux preuves de ce théorème.

Preuve calculatoire

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} && \text{On utilise la formule.}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n! \times (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} && \text{On réduit au même dénominateur.}\\
&= \frac{n! \times (k+1) + n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n! \times (k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} && \text{On factorise le numérateur par } n!\\
&= \frac{n! \times (n+1)}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} && \text{On remarque que } (n+1)! = n! \times (n+1).
\end{aligned}$$

Finalement, comme $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$, on a bien établi que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Preuve combinatoire

Observons tout d'abord que d'après le **théorème 1.9**, $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de parties à $k+1$ éléments d'un ensemble à $n+1$ éléments. Pour établir la relation de Pascal, nous allons dénombrer l'ensemble des parties à $k+1$ éléments d'une autre manière.

Pour cela, considérons un ensemble E_{n+1} à $n+1$ éléments $E_{n+1} = \{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Les parties de E_{n+1} qui ont $n+1$ éléments sont de deux sortes.

- Les parties qui ne contiennent pas e_0. Ce sont en fait des parties à $k+1$ éléments de $E_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Il y en a $\binom{n}{k+1}$ de cette sorte.
- Les parties qui contiennent e_0. Ces parties sont constituées de e_0 et d'une partie à k éléments de $E_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Combien existe-t-il de parties de cette sorte ? Il y en a autant que de parties à k élément de E_n, soit $\binom{n}{k}$.

Finalement, d'après le principe additif, nous avons bien établi la relation de Pascal :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

▲

Théorème 1.15.— Soit n et k deux entiers naturels.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

Démonstration ▽

Soit $E_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un ensemble fini de cardinal n. Nous allons dénombrer l'ensemble $\mathscr{P}(E_n)$ des parties de E_n de deux façons différentes.

À l'aide du principe additif (**théorème 1.4**)

Une partie A de E_n possède k éléments avec $k \in [\![0, n]\!]$. Pour calculer le nombre de parties de E_n, on discute suivant le nombre d'éléments k de A.

- Soit $k = 0$, il y a $\binom{n}{0} = 1$ partie de E_n à 0 élément, c'est la partie vide.
- Soit $k = 1$, il y a $\binom{n}{1} = n$ partie de E_n à 1 élément, ce sont les singletons.
- Soit $k = 2$, il y a $\binom{n}{2}$ parties de E_n à 2 éléments, ce sont les paires.

  ...
- Soit $k = n$, il y a $\binom{n}{n} = 1$ partie de E_n à 0 élément, c'est E_n tout entier.

Finalement, d'après le principe additif, le nombre de parties de E_n est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

À l'aide du principe multiplicatif (**théorème 1.6**)

Une partie A de E_n est entièrement et uniquement déterminée, lorsqu'on sait pour chaque élément de E_n s'il appartient à A ou pas. Pour dénombrer l'ensemble des parties de E_n, on peut donc raisonner par étapes.

- La partie A contient-elle l'élément e_1, Oui ou Non ? $\rightsquigarrow$ 2 possibilités
- La partie A contient-elle l'élément e_2, Oui ou Non ? $\rightsquigarrow$ 2 possibilités

  ...
- La partie A contient-elle l'élément e_n, Oui ou Non ? $\rightsquigarrow$ 2 possibilités

Finalement, d'après le principe multiplicatif, le nombre de parties de E_n est $2 \times 2 \cdots \times 2 = 2^n$.
En conclusion, nous avons établi l'égalité ...

▲