



T<sup>le</sup>

# MATHÉMATIQUES

## Spé & Expertes

*Approfondissements pour le supérieur*

»» Cours clair et rigoureux

»» QCM, Vrai/Faux,  
exercices avec solutions

»» Problèmes corrigés  
pour un entraînement  
à l'enseignement supérieur

»» Approfondissements  
sur les notions fondamentales

»» Annexes sur les notions  
transversales

»» Formulaires complets

David **Azuelos**  
Patrick **Cabau**



# TABLE DES MATIÈRES

SPÉCIALITÉ MATHS	1
<b>1 Calcul algébrique</b>	<b>3</b>
1.1 Cours	3
1.1.1 Ensembles de nombres	3
1.1.2 Opérations dans $\mathbb{R}$	4
1.1.3 Puissances entières d'un réel	5
1.1.4 Racine carrée d'un réel positif ou nul	5
1.1.5 Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$	5
1.1.6 Équations dans $\mathbb{R}$	8
1.1.7 Inéquations dans $\mathbb{R}$	9
1.1.8 Sommes et produits	9
1.2 Exercices	12
1.3 Corrigés	15
<b>2 Combinatoire et dénombrement</b>	<b>23</b>
2.1 Cours	23
2.1.1 $p$ -listes	23
2.1.2 Arrangements et permutations	24
2.1.3 Combinaisons	25
2.2 Exercices	28
2.3 Corrigés	31
<b>3 Suites</b>	<b>35</b>
3.1 Cours	35
3.1.1 Généralités	35
3.1.2 Modes de génération d'une suite	35
3.1.3 Variations	37
3.1.4 Limites	38
3.1.5 Comportement asymptotique des suites monotones	41
3.2 Exercices	43
3.3 Corrigés	50

<b>4</b>	<b>Limites de fonctions</b>	<b>67</b>
4.1	Cours . . . . .	67
4.1.1	Limite en un réel . . . . .	67
4.1.2	Limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ . . . . .	69
4.1.3	Opérations sur les limites . . . . .	71
4.1.4	Limites et comparaison . . . . .	73
4.1.5	Limite de la composée . . . . .	74
4.2	Exercices . . . . .	76
4.3	Corrigés . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Continuité</b>	<b>83</b>
5.1	Cours . . . . .	83
5.1.1	Définition . . . . .	83
5.1.2	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	85
5.1.3	Continuité et convergence de suites . . . . .	85
5.2	Exercices . . . . .	87
5.3	Corrigés . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Dérivabilité</b>	<b>99</b>
6.1	Cours . . . . .	99
6.1.1	Dérivabilité en un point . . . . .	99
6.1.2	Tangente à une courbe . . . . .	100
6.1.3	Dérivées des fonctions usuelles . . . . .	101
6.1.4	Opérations sur les dérivées . . . . .	101
6.1.5	Dérivée de la composée de 2 fonctions . . . . .	101
6.1.6	Applications de la dérivation . . . . .	101
6.1.7	Convexité . . . . .	103
6.2	Exercices . . . . .	107
6.3	Corrigés . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Fonction exponentielle</b>	<b>119</b>
7.1	Cours . . . . .	119
7.1.1	La fonction exponentielle . . . . .	119
7.1.2	Propriétés algébriques . . . . .	120
7.1.3	Limites . . . . .	120
7.1.4	Tableau de variations . . . . .	121
7.1.5	Courbe représentative . . . . .	121
7.1.6	Exponentielle, égalités et inégalités . . . . .	121
7.1.7	Fonctions de la forme $e^u$ . . . . .	122
7.2	Exercices . . . . .	123
7.3	Corrigés . . . . .	126
<b>8</b>	<b>Logarithme népérien</b>	<b>135</b>
8.1	Cours . . . . .	135
8.1.1	Définition . . . . .	135
8.1.2	Dérivabilité, variations et signe . . . . .	135
8.1.3	Propriétés algébriques . . . . .	136
8.1.4	Limites . . . . .	136

8.1.5	Tableau de variations . . . . .	137
8.1.6	Courbe représentative . . . . .	137
8.1.7	Logarithme népérien, égalités et inégalités . . . . .	137
8.1.8	Fonctions de la forme $\ln(u)$ . . . . .	138
8.2	Exercices . . . . .	139
8.3	Corrigés . . . . .	142
<b>9</b>	<b>Fonctions trigonométriques</b>	<b>151</b>
9.1	Cours . . . . .	151
9.1.1	Fonction cosinus . . . . .	151
9.1.2	Fonction sinus . . . . .	151
9.1.3	Fonction tangente . . . . .	152
9.2	Exercices . . . . .	153
9.3	Corrigés . . . . .	157
<b>10</b>	<b>Calcul intégral</b>	<b>165</b>
10.1	Cours . . . . .	165
10.1.1	Primitives d'une fonction . . . . .	165
10.1.2	Fonctions composées primitives . . . . .	166
10.1.3	Linéarité de la primitivation . . . . .	166
10.1.4	Intégrale d'une fonction . . . . .	168
10.1.5	Intégrale et primitives . . . . .	170
10.1.6	Propriétés de l'intégrale . . . . .	171
10.1.7	Intégration par parties . . . . .	173
10.2	Exercices . . . . .	175
10.3	Corrigés . . . . .	180
<b>11</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>193</b>
11.1	Cours . . . . .	193
11.1.1	Généralités . . . . .	193
11.1.2	Équation différentielle $y' = ay$ . . . . .	194
11.1.3	Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$ . . . . .	195
11.2	Exercices . . . . .	196
11.3	Corrigés . . . . .	199
<b>12</b>	<b>Géométrie vectorielle</b>	<b>209</b>
12.1	Cours . . . . .	209
12.1.1	Vecteurs de l'espace. Translation . . . . .	209
12.1.2	Droites et plans de l'espace . . . . .	210
12.1.3	Caractérisation vectorielle du parallélisme . . . . .	211
12.1.4	Positions relatives de droites et plans de l'espace . . . . .	213
12.1.5	Intersections de plans . . . . .	214
12.1.6	Géométrie analytique . . . . .	214
12.1.7	Système d'équations paramétriques d'une droite de l'espace . . . . .	216
12.1.8	Équation cartésienne d'un plan de l'espace . . . . .	216
12.2	Exercices . . . . .	217
12.3	Corrigés . . . . .	220

<b>13 Géométrie euclidienne</b>	<b>225</b>
13.1 Cours	225
13.1.1 Produit scalaire dans l'espace	225
13.1.2 Géométrie analytique	228
13.2 Exercices	232
13.3 Corrigés	235
<b>14 Probabilités</b>	<b>241</b>
14.1 Cours	241
14.1.1 Langage des événements	241
14.1.2 Probabilités	242
14.1.3 Conditionnement. Indépendance	243
14.1.4 Variables aléatoires	245
14.1.5 Somme de variables aléatoires et produit par un réel	247
14.1.6 Schéma de Bernoulli et loi binomiale	247
14.1.7 Moyenne d'un échantillon	250
14.1.8 Concentration. Loi des grands nombres	250
14.2 Exercices	252
14.3 Corrigés	256
<b>MATHS EXPERTES</b>	<b>263</b>
<b>15 Nombres complexes</b>	<b>265</b>
15.1 Cours	265
15.1.1 L'ensemble des nombres complexes	265
15.1.2 Représentation géométrique	266
15.1.3 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$	267
15.1.4 Module et arguments d'un complexe non nul	268
15.1.5 Formes trigonométriques	269
15.1.6 Formes exponentielles	269
15.1.7 Nombres complexes et géométrie	271
15.2 Exercices	273
15.3 Corrigés	276
<b>16 Polynômes</b>	<b>283</b>
16.1 Cours	283
16.1.1 Fonctions polynomiales	283
16.1.2 Racines d'une fonction polynomiale	283
16.1.3 Équations polynomiales	286
16.1.4 Inéquations polynomiales	287
16.2 Exercices	289
16.3 Corrigés	293
<b>17 Arithmétique</b>	<b>305</b>
17.1 Cours	305
17.1.1 Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$	305
17.1.2 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	306

17.1.3	Congruences . . . . .	309
17.1.4	PGCD . . . . .	310
17.1.5	Théorème de Bézout . . . . .	313
17.1.6	Théorème de Gauss . . . . .	314
17.1.7	Nombres premiers . . . . .	315
17.2	Exercices . . . . .	319
17.3	Corrigés . . . . .	324
<b>18</b>	<b>Matrices. Graphes</b>	<b>337</b>
18.1	Cours . . . . .	337
18.1.1	Matrices . . . . .	337
18.1.2	Graphes . . . . .	342
18.1.3	Chaines de Markov . . . . .	344
18.2	Exercices . . . . .	347
18.3	Corrigés . . . . .	351
PROBLÈMES _____		359
<b>P1 Développements limités</b>		<b>361</b>
<b>P2 Irrationalité de <math>\exp(1)</math></b>		<b>369</b>
<b>P3 Intégrales de Wallis et application</b>		<b>375</b>
<b>P4 Calcul de l'intégrale de Gauss</b>		<b>385</b>
<b>P5 Calcul de la somme d'Euler</b>		<b>393</b>
<b>P6 Produit scalaire de fonctions</b>		<b>399</b>
APPROFONDISSEMENTS _____		407
<b>I</b>	<b>Applications</b>	<b>409</b>
I.1	Correspondances. Fonctions. Applications . . . . .	409
I.2	Images directes et réciproques d'ensembles . . . . .	414
<b>II</b>	<b>Relations</b>	<b>415</b>
II.1	Relations binaires . . . . .	415
II.2	Relations d'équivalence . . . . .	416
II.3	Relations d'ordre . . . . .	417
<b>III</b>	<b>Structures</b>	<b>421</b>
III.1	Lois de composition . . . . .	421
III.2	Groupes . . . . .	423
III.3	Anneaux . . . . .	426
III.4	Corps . . . . .	426
III.5	Espaces vectoriels . . . . .	427

<b>IV</b>	<b>Espaces affines</b>	<b>431</b>
IV.1	Espace affine associé à un espace vectoriel . . . . .	431
IV.2	Sous-espaces affines . . . . .	432
IV.3	Applications affines . . . . .	433
<b>V</b>	<b>Barycentre</b>	<b>435</b>
V.1	Barycentre de 2 points . . . . .	435
V.2	Barycentre de 3 points . . . . .	436
V.3	Barycentre de $n$ points . . . . .	438
<b>ANNEXES</b> _____		<b>439</b>
<b>A1</b>	<b>Notions de Logique. Ensembles</b>	<b>441</b>
A1.1	Notions de logique . . . . .	441
A1.2	Ensembles . . . . .	443
<b>A2</b>	<b>Divers modes de raisonnement</b>	<b>445</b>
A2.1	Raisonnement par déduction . . . . .	445
A2.2	Raisonnement par équivalence . . . . .	445
A2.3	Raisonnement par analyse synthèse . . . . .	446
A2.4	Raisonnement par contraposée . . . . .	447
A2.5	Raisonnement par l'absurde . . . . .	447
A2.6	Raisonnement par disjonction des cas . . . . .	448
A2.7	Raisonnement par récurrence . . . . .	448
<b>A3</b>	<b>Langage Python</b>	<b>451</b>
A3.1	Variables . . . . .	451
A3.2	Fonctions en Python . . . . .	452
A3.3	Structures conditionnelles . . . . .	452
A3.4	Structures itératives . . . . .	452
<b>FORMULAIRES</b> _____		<b>455</b>
<b>F1</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>457</b>
<b>F2</b>	<b>Suites arithmétiques et géométriques</b>	<b>461</b>
<b>F3</b>	<b>Exponentielle et logarithme népérien</b>	<b>463</b>
<b>F4</b>	<b>Dérivées et primitives</b>	<b>465</b>
<b>F5</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>469</b>
<b>F6</b>	<b>Probabilités</b>	<b>471</b>
	<b>Index</b>	<b>473</b>