Tle

MATHÉMATIQUES

Spé & Expertes

Approfondissements pour le supérieur

- **Cours clair** et **rigoureux**
- **QCM**, **Vrai/Faux**, **exercices avec solutions**
- **Problèmes corrigés** pour un entraînement à l'enseignement supérieur
- **Approfondissements** sur les notions fondamentales
- **Annexes** sur les **notions transversales**
- **Formulaires complets**

David **Azuelos**
Patrick **Cabau**

ellipses

1 | Calcul algébrique

1.1 Cours

1.1.1 Ensembles de nombres

1. L'ensemble des *entiers naturels* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est défini à partir des axiomes de Peano [1].
   Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication.
2. L'équation $x+1 = 0$ n'ayant pas de solution dans $\mathbb{N}$, on est amené à construire [2] un ensemble $\mathbb{Z}$ dit ensemble des *entiers relatifs* contenant $\mathbb{N}$ dans lequel cet équation a une solution (-1). On a $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
   Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication ; de plus, tout élément n de $\mathbb{Z}$ a un opposé $-n$ appartenant encore à $\mathbb{Z}$.
3. L'équation $3x = 1$ n'ayant pas de solution dans $\mathbb{Z}$, on construit [3] un ensemble $\mathbb{Q}$ dit ensemble des *nombres rationnels* dans lequel cette équation a une solution $\left(\dfrac{1}{3}\right)$. On a $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$.
   Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication ; de plus, tout élément non nul $\dfrac{p}{q}$ admet un inverse $\dfrac{q}{p}$.
4. L'équation $x^2 = 2$ n'ayant pas de solution dans $\mathbb{Q}$, on est amené à construire [4] un ensemble $\mathbb{R}$ dit ensemble des *nombres réels* dans lequel cette équation a une solution.
   Cet ensemble peut être représenté par une droite munie d'un repère.

---

1. Il existe un ensemble, noté $\mathbb{N}$, dont les éléments sont appelés *entiers naturels* et une fonction appelée *successeur* définie sur cet ensemble vérifiant les axiomes suivants :

   (N1) 0 est un entier naturel ;
   (N2) tout entier naturel possède un successeur ;
   (N3) deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux ;
   (N4) 0 n'est le successeur d'aucun entier naturel ;
   (N5) Si une partie A de $\mathbb{N}$ contient 0 et si le successeur de tout élément de A appartient encore à A, alors A est égal à $\mathbb{N}$.

L'axiome **(N5)** est à la base du principe de récurrence.
Giuseppe Peano (1858-1932), mathématicien italien.

2. $\mathbb{Z}$ est construit à partir d'une relation d'équivalence sur le produit cartésien $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (cf. Approfondissements II, Relations, exemple 4).
3. $\mathbb{Q}$ est construit à l'aide d'une relation d'équivalence sur le produit cartésien $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
4. La construction ne fait plus appel ici comme pour $\mathbb{Z}$ et pour $\mathbb{Q}$ à des relations d'équivalence. $\mathbb{R}$ apparaît comme l'ensemble de limites de suites particulières (suites de Cauchy) (cf. Chapitre 3, exercice 8 pour un exemple de suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{a}$ où $a > 0$).

On a donc les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.1.2 Opérations dans $\mathbb{R}$

L'addition est l'opération qui à tout couple de réels (x, y) associe leur *somme* $x+y$ qui est encore un réel [5]. L'addition possède les propriétés suivantes :

(A1) l'addition est *commutative*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = y + x$$

(A2) l'addition est *associative*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$$

(A3) 0 est *élément neutre* de l'addition

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$$

(A4) Tout élément x a un *opposé* $-x$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x + (-x) = (-x) + x = 0$$

La multiplication est l'opération qui à tout couple de réels (x, y) associe leur *produit* $x \times y$ qui est encore un réel. La multiplication possède les propriétés suivantes :

(M1) la multiplication est *commutative*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \times y = y \times x$$

(M2) la multiplication est *associative*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

(M3) 1 est *élément neutre* de la multiplication

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \times 1 = 1 \times x = x$$

(M4) Tout élément non nul x a un *inverse* $\dfrac{1}{x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$$

De plus la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition

(Dg) Distributivité à gauche

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

(Dd) Distributivité à droite

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x + y) \times z = x \times z + y \times z$$

5. On dit que l'addition est une *loi de composition interne* dans $\mathbb{R}$ (cf. Approfondissements III, Structures).

1.1.3 Puissances entières d'un réel

Soit a un réel non nul et n un entier relatif.

Si $n = 0$, on pose $a^0 = 1$;
Si $n > 0$, $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$;
Si $n < 0$, $a^n = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-n}$

Proposition 1.

Soient a et b deux réels non nuls, m et n deux entiers relatifs.

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
5. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

1.1.4 Racine carrée d'un réel positif ou nul

Soit a un réel positif ou nul. Il existe un unique réel positif ou nul b tel que $b^2 = a$. Ce réel est appelé *racine carrée* de a et est noté $\sqrt{a}$.

Proposition 2. Propriétés algébriques de la racine carrée

1. $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{a}^2 = a$
2. $\forall a \in \mathbb{R},\ \sqrt{a^2} = |a|$
3. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

1.1.5 Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Relation $\leqslant$

$\mathbb{R}$ est un ensemble *totalement ordonné* par la relation d'ordre $\leqslant$.
Pour deux réels x et y quelconques, on a $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$.
La relation $\leqslant$ a les propriétés suivantes

(R) elle est *réflexive*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$$

(AS) elle est *antisymétrique*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow (x = y)$$

(T) elle est *transitive*

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \left(\left\{\begin{array}{c} x\leqslant y\\ \text{et}\\ y\leqslant z\end{array}\right. \Rightarrow x\leqslant z\right)$$

Relation d'ordre et opérations : les théorèmes de rangement

Les théorèmes suivants donnent les manipulations possibles d'une inégalité.

Théorème 1. Inégalité et addition

Soient a, b et c trois réels.

$$a\leqslant b\Longrightarrow a+c\leqslant b+c$$

Si l'on ajoute un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens [6].

Théorème 2. Inégalité et multiplication par un même nombre

Soient a, b et c trois réels.

$$\left\{\begin{array}{l} a\leqslant b\\ c\geqslant 0\end{array}\right. \Longrightarrow a\times c\leqslant b\times c \quad\text{et}\quad \left\{\begin{array}{l} a\leqslant b\\ c\leqslant 0\end{array}\right. \Longrightarrow a\times c\geqslant b\times c$$

Si l'on multiplie par un même nombre positif (resp. négatif) ou nul deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens (resp. de sens contraire) [7].

Théorème 3. Inégalité et carrés

Soient a et b deux réels.

$$0\leqslant a\leqslant b\Longrightarrow a^2\leqslant b^2 \quad\text{et}\quad a\leqslant b\leqslant 0\Longrightarrow a^2\geqslant b^2$$

Les carrés de deux nombres sont rangés dans le même ordre que ces nombres lorsque ceux-ci sont positifs, dans l'ordre contraire si ceux-ci sont négatifs [8].

Théorème 4. Inégalité et inverses

Soient a et b deux réels non nuls et de même signe.

$$a\leqslant b\Longrightarrow \frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$$

---

6. La fonction $x\mapsto x+c$ est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
7. La fonction $x\mapsto cx$ est croissante sur $\mathbb{R}$ lorsque $c\geqslant 0$ et y est décroissante lorsque $c\leqslant 0$.
8. La fonction carrée est croissante sur $[0,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,0]$.

Les inverses de deux nombres de même signe sont rangés dans l'ordre inverse de ces nombres [9].

Théorème 5. Inégalité et racines

Soient a et b deux réels positifs.

$$a \leqslant b \Longrightarrow \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$$

Les racines carrées de deux nombres positifs sont rangées dans le même ordre que ces nombres [10].

Remarque 1.– Tous ces théorèmes de rangement sont des cas particuliers du théorème suivant :

Théorème 6. Inégalité et fonction

Soient a et b deux réels d'un intervalle I tels que $a \leqslant b$.

$$f \text{ croissante sur } I \Longleftrightarrow f(a) \leqslant f(b) \quad \text{et} \quad f \text{ décroissante sur } I \Longleftrightarrow f(a) \geqslant f(b)$$

Une fonction croissante ne change pas le sens d'une inégalité, une fonction décroissante change le sens d'une inégalité.

Théorème 7. Somme d'inégalités

Soient a, b, c et d quatre réels.

$$\left\{\begin{array}{c} a \leqslant b \\ \text{et} \\ c \leqslant d \end{array}\right. \Rightarrow a + c \leqslant b + d$$

On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens.

Théorème 8. Produit d'inégalités

Soient a, b, c et d quatre réels *positifs*.

$$\left\{\begin{array}{c} a \leqslant b \\ \text{et} \\ c \leqslant d \end{array}\right. \Rightarrow a \times c \leqslant b \times d$$

On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens, lorsque tous les termes sont positifs.

¡ On ne peut pas soustraire ni diviser membre à membre deux inégalités. !

9. La fonction inverse est décroissante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
10. La fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Méthode 1. Démonstration d'une inégalité

Pour démontrer une inégalité de la forme $A \leqslant B$, on peut :

- prouver que $A - B \leqslant 0$ (ou $B - A \geqslant 0$) ;
- si A et B sont strictement positifs, prouver que $\dfrac{A}{B} \leqslant 1$;
- trouver un réel C tel que $A \leqslant C$ et $C \leqslant B$;
- utiliser les théorèmes de rangement [a].

a. Ceux-ci permettent de "partir" d'une inégalité connue (e.g. $x^2 \geqslant 0$) pour "arriver" à l'inégalité demandée.

Remarque 2.– On verra au chapitre 6 une méthode supplémentaire utilisant les variations d'une fonction.

1.1.6 Équations dans $\mathbb{R}$

La résolution d'équations est une démarche fondamentale en Mathématiques. Une équation se présente généralement sous l'une des deux formes suivantes

$$f(x) = 0. \tag{1.1}$$

ou

$$g(x) = h(x) \tag{1.2}$$

pour des valeurs de x appartenant à une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ appelée *ensemble de définition* ou *ensemble de validité* de l'équation.
Résoudre l'équation (1.1) (resp. (1.2)) c'est déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ de tous les éléments x de $\mathscr{D}$ tels que $f(x) = 0$ (resp. $g(x) = h(x)$).
Tout élément a de $\mathscr{D}$ vérifiant la relation $f(a) = 0$ (resp. $g(a) = h(a)$) est appelé *solution* de l'équation (1.1) (resp. de l'équation (1.2)).
Deux équations définies sur un même ensemble $\mathscr{D}$ sont dites *équivalentes* si elles ont le même ensemble de solutions $\mathscr{S}$. À partir d'une équation donnée, on obtient une équation équivalente en utilisant les opérations usuelles (addition d'un même nombre à gauche et à droite de l'équation, multiplication par un même nombre non nul, factorisation d'un membre, etc.).

Exemple 1.– Les équations $x^2 + x = 0$ et $-3x^3 - 3x = 0$ définies sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ sont équivalentes car la seconde est obtenue par multiplication par -3 (non nul) de la première. Elles ont toutes deux équivalentes [11] à l'équation $x(x+1) = 0$ et ont pour ensemble de solutions $\mathscr{S} = \{-1, 0\}$.

Il n'existe pas de méthode générale de résolution d'une équation quelconque ; certaines situations sont néanmoins fréquentes et doivent être reconnues ; elles sont répertoriées dans la méthode suivante :

11. Par contre, l'équation $x^2 + x = 0$ n'est pas équivalente à l'équation $x + 1 = 0$ obtenue "par simplification par x" car on perd alors la solution 0.

Méthode 2. Résolution d'une équation

Si l'équation à résoudre est équivalente à :

- une équation du premier degré $ax = b$, alors $x = \dfrac{b}{a}$ (si $a \neq 0$) ;
- une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, alors on peut utiliser les formules classiques (cf. Chapitre 16, théorème 3) ;
- une équation polynomiale, alors on peut chercher à factoriser de façon à se ramener à une équation produit nul (cf. Chapitre 16, méthode 1) ;
- une équation de la forme $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$, alors $A \times D = B \times C$ (avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$).

1.1.7 Inéquations dans $\mathbb{R}$

La résolution d'une inéquation débute par la détermination de l'ensemble de définition.
Afin d'obtenir des inéquations équivalentes sur l'ensemble de définition, on procède par équivalence.
Ici, il existe une méthode générale de résolution qui n'est pas toujours applicable dans la pratique :

Méthode 3. Résolution d'une inéquation

Pour résoudre une inéquation (autre que du premier degré) :

- on se ramène à une inéquation dont l'un des membres est nul (on fait "tout passer d'un même côté") ;
- on transforme la quantité obtenue en produit (on factorise) ou en quotient (on réduit au même dénominateur) ;
- on dresse un tableau de signes faisant intervenir les différents facteurs obtenus ;
- on lit les solutions de l'inéquation dans le tableau.

1.1.8 Sommes et produits

Le symbole Σ de la sommation

Somme simple. Soit n un entier naturel non nul.
Si a_1,...,a_n sont n nombres réels ou complexes, la somme de ces nombres est notée

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$$

Cette somme est aussi égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$. La somme ne dépend pas de l'indice de sommation (i ou k). On dit que cet indice est *muet*.

Exemple 2.– La somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls est [12]

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + \cdots + n^2$$

Proposition 3. Linéarité de la sommation

Soient a_1,...,a_n n nombres réels ou complexes et soit un nombre λ.
On a alors

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$

Exemple 3.– Nombre de parties d'un ensemble.
En dénombrant de deux manières différentes le nombre de parties d'un ensemble à n éléments, on obtient :

$$2^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$$

Somme double. Soit $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant m}$ une suite double finie de réels ou de complexes.
La somme de ces nombres est

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{ij} + \cdots + a_{nm}$$

Exemple 4.– Soit $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des $n \times m$-matrices $M = (a_{ij})$.
On peut définir deux normes [13] sur cet ensemble à l'aide de sommes doubles par

- $\displaystyle\|M\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$
- $\displaystyle\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$

12. On montre par récurrence que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

13. Une *norme* N sur un espace vectoriel E (cf. Approfondissements III, Structures) est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(N1) $\forall \vec{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda.\vec{u}) = |\lambda| \times N(\vec{u})$;
(N2) Inégalité triangulaire. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,\ N(\vec{u} + \vec{v}) \leqslant N(\vec{u}) + N(\vec{v})$.