Le Grand Oral du BAC en sciences

Pistes de réflexion en

Mathématiques - NSI - Physique-chimie - SVT

Stéphane Daniel
Pierre-Marie Bourlon
Jean-Baptiste Faure
Juliette Fenogli
Romaric Giacomino
Delphine Monnier-Ragaigne
Carole Nicolleau
Jean-François Olivieri
Alain Roca

ellipses

1

L'aiguille de Buffon : déterminer une valeur approchée de π avec des aiguilles

THÈMES ABORDÉS
Trigonométrie
Probabilité
Loi des grands nombres
Calcul intégral

π est certainement le nombre le plus emblématique des mathématiques pour une majorité des gens. Il apparaît souvent, mais sa valeur utilisée pour les calculs reste une approximation. Nous allons voir comment on peut, à l'aide des probabilités et de la géométrie, obtenir une approximation de cette valeur tout ceci en nous basant sur un jeu de hasard.

Exemple d'argumentation

Introduction

La présence du nombre π dans de nombreuses formules, issues de domaines souvent très éloignés de la géométrie, fascine. Dès lors on comprend tout l'intérêt d'en connaître des valeurs approchées fiables.

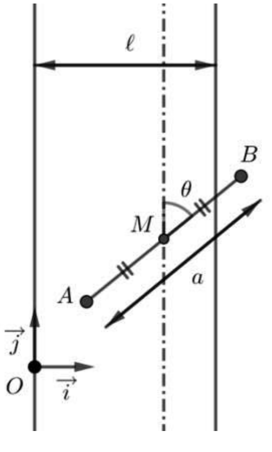
Le comte de Buffon naturaliste, philosophe et mathématicien du XVIIIe siècle s'est intéressé à ce nombre et a proposé une méthode originale pour en estimer la valeur. Publiée en 1733, elle est issue d'une variante du jeu du franc carreau. La règle est la suivante : un joueur lance une pièce de monnaie sur un damier, il gagne uniquement si la pièce tombe sur un carreau sans en toucher un autre. Dans la version du Comte de Buffon, c'est une aiguille qui est lancée sur un parquet à lames (toutes de même largeur), si l'aiguille est à cheval sur deux lames, le joueur perd. Le problème est alors plus complexe car l'orientation de l'aiguille intervient.

Nous nous proposons de détailler le raisonnement mené par Buffon qui aboutira au calcul d'une valeur approchée de π.

Pistes pour un développement

Dans un premier temps, vous expliquerez l'expérience de Buffon. Ensuite vous exposerez la raison fondamentale permettant d'affirmer que la fréquence de réalisation d'un événement, lors de répétitions indépendantes les unes des autres, tend vers sa probabilité, avec l'augmentation de leur nombre.

Dans la suite nous donnons les éléments de démonstration permettant de calculer la probabilité qu'une aiguille se retrouve à cheval entre deux lames d'un parquet.



L'unité de longueur étant, par exemple, le centimètre, considérons des lames de parquet de largeur ℓ dont les bords sont assimilés à des droites parallèles, et une aiguille de longueur a. L'aiguille sera modélisée par un segment $[AB]$. Notons θ, $\theta \in [0\,;\pi]$, l'angle (en radian) entre la droite (AB) et un bord d'une lame. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, comme sur la figure ci-contre. Notons $M(x\,;y)$ le milieu du segment $[AB]$. Sans perte de généralité nous pouvons considérer que le segment $[AB]$ est sur une lame, (voir figure ci-contre) on a donc $0 \leq x \leq \ell$.

Montrer que l'aiguille coupe un des bords de la lame de parquet si, et seulement si :

$$x \leq \frac{a}{2}\sin(\theta) \text{ ou } x \geq \ell - \frac{a}{2}\sin(\theta).$$

Nous constatons alors que la seule connaissance du couple $(\theta\,;x)$ permet de savoir si l'aiguille est à cheval entre deux lames.

Définissons sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ les fonctions :

$f : \theta \mapsto \frac{a}{2}\sin(\theta)$ et $g : \theta \mapsto \ell - \frac{a}{2}\sin(\theta)$.

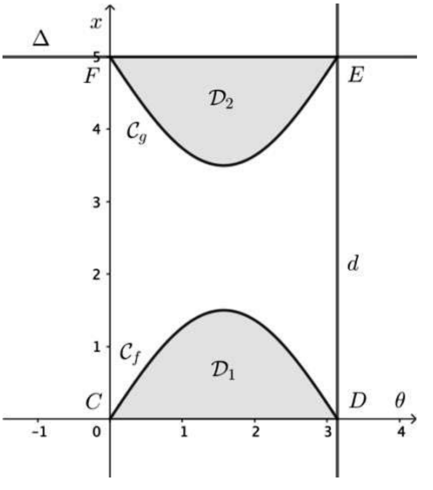
Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé.

Le segment $[AB]$ coupe un des bords de la lame si, et seulement si,

$N(\theta\,;x) \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ où $\mathcal{D}_1 = \{P(\theta\,;x) \in \mathcal{P} : \theta \in [0\,;\pi]$ et $0 \leq x \leq f(\theta)\}$

et $\mathcal{D}_2 = \{P(\theta\,;x) \in \mathcal{P} : \theta \in [0\,;\pi]$ et $g(\theta) \leq x \leq \ell\}$

Le domaine $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ est représenté par la partie grisée dans la figure ci-contre. Nous y avons représenté les graphes suivants :



$\mathcal{C}_f : x = f(\theta)\,;\ \mathcal{C}_g : x = g(\theta)\,;$

$\Delta : x = \ell\,;\ d : \theta = \pi.$

L'aiguille tombe au « hasard », c'est-à-dire sans conditionnement, sur le parquet, donc on peut raisonnablement penser que la loi de probabilité suivie par θ est uniforme sur l'intervalle $[0\,;\pi]$. Dans ce cas on admet que la probabilité que l'aiguille coupe un des bords de la lame du parquet est donnée par le quotient :

$$p = \frac{\text{aire du domaine } \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2}{\text{aire du rectangle } CDEF}$$

Montrer que $p = \dfrac{2a}{\ell\pi}$.

À ce stade, le candidat pourra réaliser l'expérience de Buffon et dégager quelques éléments remarquables. Vous pourrez également simuler cette même expérience, en utilisant l'outil informatique, et en posant par exemple $a = \ell$.

L'expérience de Buffon nous donne l'occasion d'obtenir une approximation de la valeur de π par une méthode probabiliste. Idée originale et inédite pour l'époque.

Conclusion

L'approche probabiliste a de nombreuses vertus. En premier lieu elle court-circuite, en partie, l'élaboration de formules délicates ainsi que des calculs longs, en s'appuyant sur un processus statistique. Ensuite elle permet une mise en application des connaissances issues d'autres branches des mathématiques. Cette tendance universaliste, est très fructueuse puisqu'elle est à l'origine de nombreuses découvertes scientifiques récentes.

Vous l'aurez compris, les techniques probabilistes mettent à contribution l'informatique dans tous ces aspects. Par là même elles motivent la recherche dans ce domaine.

Bien sûr le défaut originel de cette méthode est un manque de contrôle sur l'exactitude du résultat obtenu. Mais là aussi, des garde-fous mathématiques existent et peuvent faire l'objet d'un autre exposé.

Questions du jury

Quelles autres méthodes sont utilisées pour déterminer une approximation de la valeur de π ?

Comment peut-on simuler par programmation informatique l'expérience de lancer d'aiguilles sur un parquet ?

Connaissez-vous d'autres problèmes associant le calcul des probabilités à d'autres champs de connaissances ?

Le Comte de Buffon a-t-il fait d'autres travaux en mathématiques ? En sciences expérimentales ?

La conclusion parle de garde-fous, de quoi s'agit-il ?

Bibliographie et webographie

- Présentation du jeu du franc carreau qui a servi de base au Comte de Buffon pour son « aiguille » de Buffon : https://www.apmep.fr/Le-jeu-du-franc-carreau
- Présentation du nombre π, la méthode de Buffon (entre autres) y est aussi présentée : http://www.pi314.net/
- L'aiguille de Buffon avec possibilité de simuler l'expérience et donc d'approximer π : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/buffon.htm

Ouvertures

✔ Calcul d'intégrales à l'aide des probabilités : la méthode de Monte-Carlo.

✔ Origines de quelques formules, issues de différents domaines des sciences, faisant apparaître le nombre π.

✔ Quelques algorithmes donnant des approximations de π.

2

Calcul intégral : la méthode de Monte-Carlo

THÈMES ABORDÉS
Intégration
Loi des grands nombres

Nous nous proposons d'exposer une méthode statistique très simple à mettre en œuvre, permettant d'obtenir une valeur approchée de n'importe quelle intégrale calculée sur un intervalle borné. L'efficacité de cet outil est telle, que nous le rencontrons dans tous les domaines scientifiques, jusqu'aux marchés financiers. Il s'agit de la méthode de Monte-Carlo.

Exemple d'argumentation

Introduction

Le calcul d'une l'intégrale d'une fonction continue f est souvent adossé à celui d'une primitive de f. Cependant, même si nous savons que toute fonction continue admet une primitive, il est souvent difficile d'exprimer celle-ci à l'aide des fonctions usuelles connues. Parfois même on n'en connaît pas !

Pourtant le calcul d'intégrale est omniprésent notamment dans les disciplines expérimentales et les fonctions à intégrer très « complexes ». Finalement de nombreux domaines sont tributaires des résultats de ces calculs. Le principe adopté dans ces cas est l'approximation des valeurs de ces intégrales grâce à des méthodes géométriques, voire statistiques. Le second point de vue a donné naissance à la méthode de Monte-Carlo, en référence aux jeux de hasard des casinos.

Après avoir expliqué l'origine de la méthode développée au cours de la Seconde Guerre mondiale, nous rappellerons le principe de l'intégrale et son lien avec le calcul d'aire. Nous présenterons ensuite le processus aléatoire permettant d'évaluer cette aire donc d'estimer la valeur de l'intégrale.

Pistes pour un développement

Considérons une fonction f continue, positive et définie sur un intervalle $I = \left[a\,;b\right]$. Munissons le plan d'un repère orthonormé. Notre exposé consiste à trouver une valeur approchée de l'aire du domaine Δ, délimité par :

- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$;
- l'axe des abscisses ;
- la courbe d'équation $y = f(x)$.

f est définie sur l'intervalle I, donc il existe un nombre réel c tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq c$. Sous ces hypothèses, Δ est inclus dans un rectangle $ABCD$ avec par exemple $A(a\,;0)$, $B(b\,;0)$, $C(b\,;c)$ et $D(a\,;c)$.

La méthode de Monte-Carlo se développe en deux temps :

- distribution aléatoire de N points dans la surface du rectangle $ABCD$;
- dénombrement des n points appartenant à Δ parmi ceux déjà placés.

La loi des grands nombres nous assure que plus N est grand, plus $\frac{n}{N}$ est proche de $\frac{\text{aire}(\Delta)}{\text{aire}(ABCD)}$. Par conséquent $\text{aire}(\Delta) \approx \frac{nc(b-a)}{N}$, cette approximation étant d'autant plus pertinente que N est grand.

Un programme élémentaire en langage Python permettra aisément de réaliser une estimation d'une aire par cette méthode de calcul. On pourra choisir une fonction ayant une primitive connue de façon à comparer l'estimation avec la valeur exacte de l'intégrale. On fera varier la valeur de N pour en mesurer l'impact sur l'approximation.

À titre expérimental, on vérifiera sur quelques exemples, la validité de la limite donnée dans le lexique. $\frac{S_N}{N}$ est la variable aléatoire fréquence des points qui, parmi les N intérieurs au rectangle $ABCD$, appartiennent au domaine Δ, et δ la précision (choisie arbitrairement) de l'approximation. Enfin : $p = \frac{\text{aire}(\Delta)}{\text{aire}(ABCD)}$.

Monte-Carlo n'est pas la seule méthode d'approximation d'une intégrale. En connaissez-vous d'autres ?

Conclusion

L'immense avantage de cette méthode d'estimation d'une intégrale est sa facilité de mise en œuvre, même par un non-mathématicien. Par contre elle ne donne pas la valeur exacte de l'intégrale, et elle nécessite de considérer un grand nombre de points pour obtenir une précision raisonnable, c'est-à-dire avec une erreur la plus faible possible. Il existe des méthodes d'accélération de la convergence, mais elles dépassent le cadre des enseignements de Terminale.

Lexique des mots à connaître

Loi des grands nombres (appliquée à un schéma de Bernoulli) : soit N un entier naturel non nul et S_N une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(N\,;p)$, alors pour tout nombre strictement positif δ :

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \leq \delta\right) = 1$$

Questions du jury

Peux-tu écrire la version de la loi des grands nombres que tu utilises ici, et comment l'appliques-tu dans le cadre de la méthode que tu nous as exposée ?

Quelle interprétation expérimentale peut-on faire de la loi des grands nombres ?

Quelle est la différence entre surface et aire ?

Comment faire si la fonction à intégrer n'est pas positive ?

Y a-t-il des fonctions pour lesquelles la méthode de Monte-Carlo est moins efficace ?

Comment peut-on programmer un processus de tirage aléatoire ?

Connaissez-vous d'autres méthodes permettant de calculer une valeur approchée d'une intégrale ?

Bibliographie et webographie

- Approximation d'une surface par la méthode de Monte-Carlo : http://www.ac-grenoble.fr/maths/PM/Ressources/628/Approximation_de_surface__MontA-Carlo_.html#:~:text=Une%20m%C3%A9thode%20(la%20m%C3%A9thode%20de,situ%C3%A9s%20dans%20la%20surface%20cherch%C3%A9e
- Présentation du calcul d'intégrale avec la méthode de Monte-Carlo : https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/numerique/montecarlo/integrales/integrales.html
- Autre présentation de la méthode de Monte-Carlo avec des exemples d'application : https://www.techno-science.net/definition/6374.html

Ouvertures

- ✔ Revue de différentes méthodes d'estimation du nombre π.
- ✔ Les méthodes numériques de calcul intégral.
- ✔ Quelques applications de la loi des grands nombres.