

TOUT LE PROGRAMME DE **MATHS**

Licence
PPPE

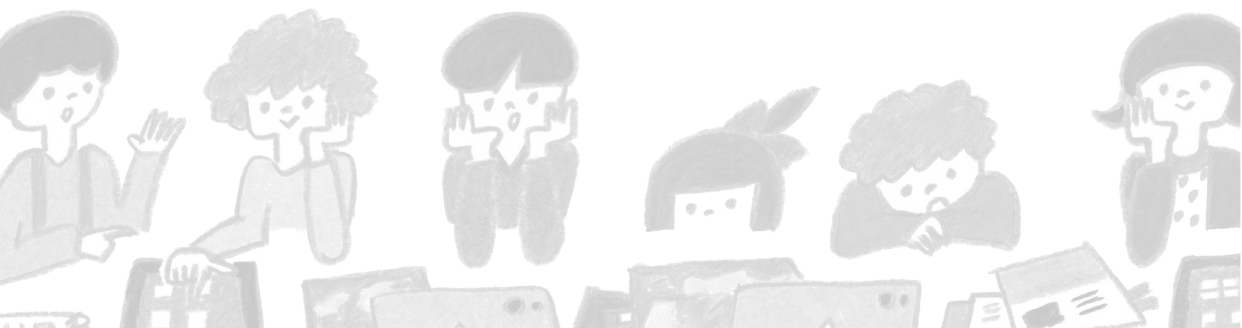
PARCOURS PRÉPARATOIRE
AU PROFESSORAT DES ÉCOLES

Cours et exercices corrigés



PREMIERE ANNEE

1	Numérations ; Bases	11	Mesurer
2	Arithmétique	12	Suites numériques
3	Nombres Décimaux	13	Dénombrement
4	Nombres rationnels	14	Probabilités
5	Opérations sur les fractions	15	Premiers éléments de géométrie
6	Nombres réels	16	Triangles
7	Nombres négatifs	17	Quadrilatères
8	Premiers pas avec les équations	18	Lieux géométriques
9	Calcul littéral : réécritures élémentaires	19	Aires
10	Calcul littéral : réécritures avancées	20	Théorème de Pythagore



1 Numération ; Bases

Prérequis : Périodes historiques en Europe

L'ethnomathématique nous amène à penser que, dès la préhistoire, l'humanité utilisait la notion de nombre. Mais se servir des nombres et les écrire sont deux choses différentes.

La seconde ouvre la porte aux mathématiques et se trouve être un premier pas essentiel, mais non des moindres.

1 – Différents types de numérations.

Définition – En mathématiques, une numération est une façon d'écrire les nombres, utilisant des symboles appelés « chiffres ».

Point
info

En 1974, Joseph Leif, Inspecteur Général de l'Instruction Publique, anciennement professeur de philosophie, propose plus de 800 définitions dans son ouvrage « Philosophie de l'Éducation » aux éditions Delagrave. Pour « numération », il écrit : *Manière de concrétiser, de rendre sensible la notion abstraite de nombre.*

Dans l'histoire de l'humanité, il existe plusieurs systèmes de numération, qui peuvent être très différents selon les civilisations et les cultures. Pour chacune d'elle, l'utilisation qui était faite des nombres, ainsi que ceux qui étaient connus, apparaît comme déterminante.

En occident, on distingue principalement deux sortes de numérations.

Définition – Une numération est **additive** lorsque chaque symbole représentant un chiffre a une valeur fixe et que les nombres sont écrits comme une suite de chiffres.

Dans un tel système, le lecteur doit ajouter la valeur des différents chiffres d'un nombre pour obtenir sa valeur.








Point
info



Le système s'en approchant et le plus connu par les élèves est la numération Romaine.

Mais, celle-ci a aussi une composante soustractive, ce qui complique considérablement les choses, comme nous le verrons par la suite. Cette numération ne peut donc pas être qualifiée d'« additive ».

Donc ce n'est sans doute pas le meilleur exemple à étudier en premier, en particulier avec des écoliers.

Exemple : La numération égyptienne.

Nom	Bâton	Anse	Corde	Fleur de Lotus	Doigt	Têtard	Dieu agenouillé
Symbole							
Valeur	Un	Dix	Cent	Mille	Dix mille	Cent mille	Un million

Dans cette numération, le nombre six s'écrit  et le nombre treize .

Définition – Une numération est **positionnelle** lorsque la valeur d'un chiffre dépend de la place où il se trouve dans l'écriture.

Exemple : La numération indo-arabe.

Point info

Les chiffres communément appelés "arabes" ont, en fait, été inventés par les indiens (de l'Inde) durant l'Antiquité. C'est lors de leurs échanges, notamment à propos d'astronomie, qu'ils les ont transmis aux arabes. En particulier, Al-Khwarizmi, le père de l'Algèbre, a écrit un ouvrage à leur sujet. Puis ce sont lors des invasions arabes au moyen âge qu'ils ont été transmis en Europe.

A noter, que ce sont les indiens qui ont inventé le zéro. Longtemps, les mathématiciens arabes ne l'ont pas considéré comme un nombre.

Nom (latinisé)	sifr	wahid	isnan	salasah	arba'ah
Symbole	0	1	2	3	4

Nom (latinisé)	hamsah	sittah	sab'ah	samaniyah	tis'ah
Symbole	5	6	7	8	9

Dans cette numération, le nombre six s'écrit « 6 » et le nombre treize « 13 ». En effet, les dix chiffres seuls servent à écrire les dix premiers nombres naturels. Puis, c'est une numération en Base Dix, c'est-à-dire que l'on fait des "paquets" de dix unités appelé « dizaines ». Ainsi, 13 signifie 1 paquet (ici de dix) et 3 unités soit un total de treize unités.

Point info

Le système d'écriture arabe se lit de droite à gauche. Le début du nombre est donc le chiffre 3.

Dans 13, il y a 3 (trois) unités, puis 1 (une) dizaine.

Le nombre 100 commence par 0 unité et 0 dizaine. Le 1 devant signifie qu'on a fait un « paquet » de dizaine, car on avait dix dizaines. Cela fait une « centaine » qui contient cent unités.

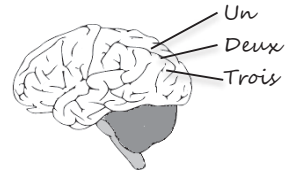


2 – Nombres et cerveau humain.

Les neurosciences ont permis de démontrer que notre cerveau connaît empiriquement les nombres « un », « deux » et « trois ». Au-delà, cela fait « beaucoup ».

Un test des plus simples permet de le voir :

- Demandez à quelqu'un de vous assister.
- Prenez des objets identiques dans votre main.
- Montrez-les lui pendant moins d'une seconde.
- Demandez-lui combien il y en avait.



Chaque fois qu'il y en a moins de quatre, la personne vous répondra immédiatement. Pour quatre à cinq, vous la verrez réfléchir (en fait, elle calcule). Au-delà, c'est presque impossible.

Il apparaît que beaucoup de civilisations ont découvert (ou pressenti) cela et ont adapté leur numération en conséquence. Par exemple, dans la numération romaine, rapidement, on a fait en sorte de ne pas avoir plus de trois fois le même chiffre. C'est d'ailleurs ce qui a fait que ce n'est pas une simple numération additive. Dans la numération indo-arabe, on range les chiffres trois par trois en partant du début du nombre (qui est à droite).

Exemples : Le nombre quatre, en numération romaine, s'écrivait dans les premiers temps IIII et a été remplacé par IV.

Le nombre dix millions dans la numération indo-arabe s'écrit 10 000 000.

Point
info

La connaissance empirique de ces trois nombres amène les neuroscientifiques à penser que la construction des autres nombres pourrait se faire par une « relation d'équivalence ». Elle serait initialisée par le fait que notre cerveau produirait le même type d'action neuronale pour passer de un à deux et de deux à trois.

C'est ainsi que notre cerveau en déduirait la notion de « ajouter un ».

3 – Numération romaine.

Comme nous l'avons évoqué plus haut, la numération Romaine se rapproche d'une numération additive mais avec des règles supplémentaires soustractives et de position, pour éviter d'écrire plus de trois fois le même chiffre.

En fait, elle est l'héritage de numérations plus anciennes qu'elle a simplifiées. Dans les premiers temps de l'Antiquité, on trouve pour les échanges commerciaux des objets en terre qui contiennent des billes pour mémoire de l'accord passé. Une fois la transaction effectuée, l'objet est cassé pour vérifier que le nombre d'objets obtenus était bien celui prévu. Mais, les marchands faisaient aussi des marques sur



l'objet lui-même pour se rappeler de son contenu. Ce sont les débuts des numérations cunéiformes (en forme de clou).

Pour la numération romaine, les chiffres sont :

Symbole	I	V	X	L	C	D	M
Valeur	un	cinq	dix	cinquante	cent	cinq cents	mille

Point
info

Pour les romains, l'absence de quantité – le zéro chez les indiens – n'est pas un nombre et n'entre pas dans les problèmes mathématiques.

Au Vème siècle, le mathématicien indien Brahmagupta sera le premier à dessiner un symbole pour exprimer l'absence ou le vide : « śūnya » en indien.

Le I est une simple marque (ou un clou, ou une entaille selon les écritures), le V est l'évolution de deux marques se touchant pour signifier « cinq », le X est l'évolution d'une marque barrée pour signifier « dix » et ainsi de suite.

Avec ces chiffres, les premiers nombres suivent une règle additive :

un : I deux : II trois : III

A partir de là, les choses se compliquent un peu. Selon les auteurs, les nombres suivants peuvent avoir des écritures différentes. Il n'y a donc **pas unicité**, mais les Romains ne se posaient pas ce genre de questions. Ainsi, parfois, on trouve quatre sous la forme IIII.

Depuis, cela a été repris, retravaillé et uniformisé. Par exemple, écrire des nombres supérieurs à trois avec de nombreuses occurrences de « I » est difficile à lire (voir paragraphe précédent).

On a donc posé la règle ainsi :

Règle de numération – les chiffres des grandes quantités s'écrivent avant ceux des petites quantités. Si un chiffre de petite quantité est écrit avant un chiffre de grande quantité, il correspond à une soustraction.

Remarque : C'est cette règle, en particulier, qui fait que l'écriture indo-arabe n'est pas simplement additive, contrairement à la précédente. Mais, sans cela, certains nombres sont difficiles à lire.

Pour que les nombres aient une **écriture unique**, il faut rajouter la règle suivante :

Règle de numération – On peut soustraire

I de V ou X

X de L ou C

C de D ou M

Par exemple, on peut enlever un à cinq ou dix, mais pas à cent. Sinon, le nombre quatre-vingt-dix-neuf aurait deux écritures : IC et XCIX.



Cela exclut des écritures beaucoup plus simples pour certains nombres mais aurait obligé à rajouter de nombreuses exceptions pour assurer l'unicité de l'écriture.

Point
info

L'unicité de l'écriture n'est pas toujours décidée. Par exemple, en japonais, les associations de kanjis peuvent souvent se lire de plusieurs manières.

Mais, beaucoup de civilisations ont trouvé que cela rendait le travail nettement plus difficile. Elles ont donc travaillé à l'unicité de l'écriture.

Quatre s'écrit donc IV, c'est-à-dire cinq moins un, en appliquant la première règle de numération ci-dessus.

Il en va de même pour neuf : IX, quarante : XL, quatre-vingt-dix ; XC, neuf cent : CM.

Pendant très longtemps, ces chiffres ont suffi, trois « mille » étant déjà beaucoup. Puis on a permis d'écrire quatre M successif.

Par suite, des numérations étendues ont été créées, pour permettre d'écrire des nombres beaucoup plus grands. Par exemple, l'ajout d'une barre au-dessus des symboles a signifié une multiplication par mille. On peut même ajouter une barre au-dessus d'une barre pour multiplier par un million.

Mais cela fait perdre l'unicité de l'écriture, car mille, par exemple, s'écrit M ou \bar{I} .

Exercices.

Exercice 1.

1. Calculer  plus .

2. Calculer  moins .

 5 min

Exercice 2.

1. Quel est le plus grand nombre que l'on peut écrire en chiffres romains non étendus, en respectant scrupuleusement les deux règles d'écriture ?

2. Calculer MXCXVII plus MMCCLXXIV.

3. Calculer CLXXXVII plus XIII.

4. Calculer CCLXII moins CXXII.

 10 min

4 – Numération indo-arabe.

Depuis le moyen âge, cette numération s'est imposée progressivement car elle est de loin la plus efficace pour travailler, en particulier pour faire des calculs au-delà des simples additions et soustractions.



Point info

A la Renaissance, les mathématiciens ont essayé de produire une mathématique issue du meilleur des mélanges entre les mathématiques grecques, qui était principalement de la géométrie, et les mathématiques apportées par les arabes. Mais, à l'époque, ces derniers utilisant un alphabet et des sonorités difficiles pour les européens, beaucoup de choses ont été traduites en grec, en latin ou latinisées plus ou moins approximativement.

C'est ainsi qu'on trouve désormais un tableau de numération indo-arabe avec des noms de colonnes en grec !

Le tableau de numération est le suivant :

k	h	da	u
<i>kilo</i>	<i>hecto</i>	<i>deca</i>	<i>unité</i>
milliers	centaines	dizaines	unités

Celui-ci permet une action de calcul terriblement efficace : **poser**. C'est simplement calculer à l'intérieur du tableau.

Seule la division demandera 2 tableaux : 1 pour le dividende et 1 pour écrire progressivement le quotient.

Ce tableau peut également s'adapter en tableau de conversions (pour les unités allant de 10 en 10 comme le mètre, le litre ou le gramme).

Ce tableau sera aussi prolongé pour la construction des décimaux.

Point info

On aborde un point important sur le nom des colonnes. Celles qui seront rajoutées et correspondant aux décimales se nommeront *déci*, *centi* et *milli*. Elles seront représentées par les lettres d, c et m.

Du coup, il est sans doute important de ne pas noter D, C et M les colonnes des dizaines, centaines et milliers. Ce choix est parfois fait pour "simplifier" la compréhension des élèves, mais à fort probablement l'effet inverse, d'autant qu'elles sont dans l'ordre inverse avant les unités.

Il pourrait se justifier par l'idée de ne pas mettre de termes grecs. Mais on ne change pourtant pas le nom des polygones en « plusieurs côtés » ou même celui des « décimaux », pourtant avec la même racine grecque.

Et si les élèves sont capables d'intégrer « spoiler » et « friendzone » dans leur vocabulaire, ils doivent être en capacité de gérer trois préfixes grecs...



5 – Bases.

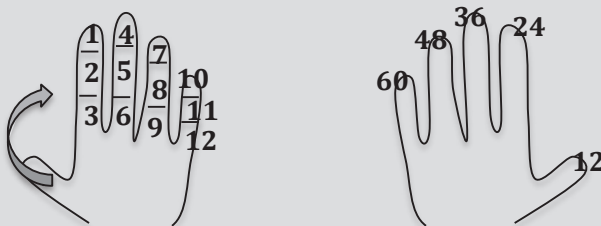
En mathématiques, une base correspond à une façon de regrouper les unités. Classiquement, on compte en base dix. Cela est lié au fait de compter sur ses dix doigts. Un « paquet » correspond à « deux mains ». Les chiffres romains correspondent ainsi à un doigt (I), une main (V) et deux mains (X).

Mais, en informatique par exemple, on utilise d'autres bases. L'ordinateur traduit qu'il reçoit ou ne reçoit pas de courant sur un fil pour 1 ou 0, ce qui se passe en base deux. Mais comme ces fils ont été regroupés en paquets de 8 fils (appelés « octet »). Il travaille aussi parfois en base $2 \times 8 = 16$ avec les chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E et F. Par exemple, les clefs de chiffrement des box Internet, utilisées pour se connecter au wifi, ne sont pas des mélanges de chiffres et lettres mais des nombres écrits en base seize.

Point
info

On peut aussi compter sur ses mains de soixante en soixante. Il suffit d'en retourner une et de compter sur ses phalanges avec le pouce de celle-ci. Il y a alors douze phalanges sur les quatre doigts restant.

L'autre main sert à compter les groupes de douze. Avec deux doigts, nous avons 24, ce qui explique pourquoi il y a 24 heures dans une journée (12 le matin et 12 le soir). Avec les cinq doigts de la main nous arrivons à 60.



Le nombre 60 a des propriétés arithmétiques très intéressantes puisqu'il est divisible par 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 puis 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 et 60 donc permet de faire de nombreux partages sans utiliser ni de décimal ni de fraction.

C'est pourquoi il a été choisi pour les minutes, les secondes mais aussi les angles mesurés en degrés.

Exemple : En base huit, l'écriture 13 signifie 3 unités et 1 paquet, ici de 8. Cela fait donc onze.

Point
info

En base huit, 13 ne se lit pas « treize » car cela signifie dix plus trois. On le lit en séparant les chiffres et en commençant par la gauche : un – trois. D'ailleurs on l'écrira plutôt $\overline{13}^{(8)}$ pour rappeler dans quelle base le lire. L'écriture sans base spécifiée, est celle en base dix.

L'exemple ci-dessus peut donc s'écrire :

$$\overline{13}^{(8)} = 3 + 1 \times 8 = 3 + 8 = 11$$

