Apprendre à raisonner

MATHS

3e

Mathieu Kieffer

ellipses

1

Nombres réels

1.1 Petite synthèse des nombres déjà rencontrés

Depuis la classe de Sixième, nous avons rencontré plusieurs ensembles de nombres :

1. L'ensemble des NOMBRES ENTIERS NATURELS $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$.
2. L'ensemble des NOMBRES ENTIERS RELATIFS $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; \ldots\}$.
3. L'ensemble des NOMBRES DÉCIMAUX $\mathbb{D}$. Il s'agit des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction où le numérateur est un nombre nombre entier relatif et où le dénominateur est une puissance de 10 (cf. cours de Quatrième). Autrement dit, il s'agit des nombres dont la représentation décimale comporte un nombre fini de chiffres à droite de la virgule.
   Exemple. $-3,675 \in \mathbb{D}$ car $-3,675 = \frac{-3\,675}{10^3} = \frac{-3\,675}{1\,000}$.
4. L'ensemble des NOMBRES RATIONNELS $\mathbb{Q}$. Il s'agit des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs.

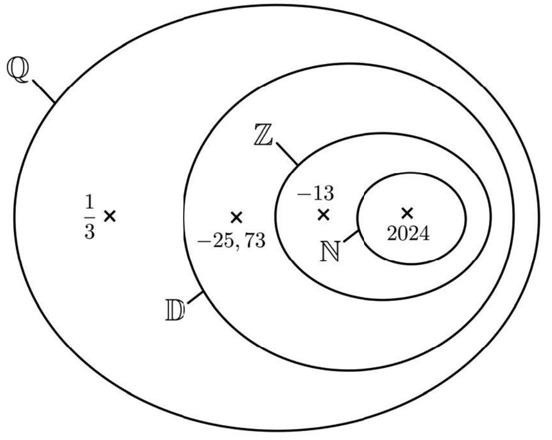
Proposition 1. *Ces ensembles de nombres sont des matriochkas (i.e. des poupées russes). Plus formellement,* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Démonstration. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: cette inclusion est évidente d'après les définitions de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$: soit $a \in \mathbb{Z}$, alors $a = \frac{10a}{10}$ où $10a$ est nombre entier relatif. Donc, par définition, a est également un nombre décimal.
$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$: soit $a \in \mathbb{D}$, alors a possède un nombre fini n de chiffres derrière la virgule et peut donc se réécrire sous la forme suivante :

$$a = \frac{a \times \overbrace{10 \times \ldots \times 10}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}}}$$

Ainsi, par définition, a est un nombre rationnel. $\square$

Illustration :



Remarque. $2\,024 \in \mathbb{N}$ donc $2\,024 \in \mathbb{Z}$, $2\,024 \in \mathbb{D}$ et $2\,024 \in \mathbb{Q}$.

1.2 Focus sur les nombres rationnels

Exemple. Voyons deux exemples :

1. Le nombre rationnel $\frac{317}{125}$ est-il décimal ?
   On remarque que $125 \times 8 = 1\,000$. D'où $\frac{317}{125} = \frac{317\times 8}{125\times 8} = \frac{2\,536}{1\,000} = 2,536$. Ainsi, par définition, $\frac{317}{125}$ est un nombre décimal.
2. Le nombre rationnel $\frac{73}{22}$ est-il décimal ?
   Divisons 73 par 22, on obtient $3,31818181818\ldots$ Le quotient n'est pas exact, donc $\frac{73}{22}$ n'est pas décimal. En revanche, on remarque qu'aussi loin que l'on poursuive la division, le nombre « 18 » se répète à partir de la deuxième décimale et cela, indéfiniment. On dit alors que $3,31818181818\ldots$ est le développement décimal illimité périodique de $\frac{73}{22}$. De plus, $3,3$ est appelé la PARTIE IRRÉGULIÈRE du développement, et 18, la PARTIE PÉRIODIQUE du développement.

Remarque. Plus généralement, considérons un nombre rationnel représenté par la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ puis effectuons la division de a par b :

1. Si la division se termine, alors $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal appelé fraction décimale.
2. Sinon, la division se poursuit indéfiniment. Toutefois, les restes successifs étant tous inférieurs à b, il en résulte qu'après au plus b divisions, nous retrouverons nécessairement un reste déjà obtenu. Ainsi, à partir de ce rang, les chiffres du quotient réapparaîtront dans le même ordre et, par conséquent, le développement décimal sera périodique. D'où le théorème suivant :

Théorème 2. *Le développement décimal d'un nombre rationnel est soit fini, soit illimité et périodique à partir d'un certain rang.*

Remarque. La question de la réciproque se pose naturellement : tout nombre dont le développement décimal illimité est périodique à partir d'un certain rang définit-il un nombre rationnel ?

Exemple. Étudions deux exemples :

1. Considérons $8,3864439439439439439439439\ldots$ et supposons que ce développement décimal définisse un nombre rationnel représenté par la fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Alors :

$$10\,000 \times \frac{a}{b} = 83\,864,439439439439\ldots$$

d'où :

$$\left(10\,000 \times \frac{a}{b}\right) - 83\,864 = 0,439439439439\ldots$$

D'après le cours de Quatrième, $\left(10\,000 \times \frac{a}{b}\right) - 83\,864$ est une fraction. Notons-la $\frac{x}{y}$. On a alors :

$$1\,000 \times \frac{x}{y} - 439 = 0,439439439439\ldots$$

autrement dit :

$$1\,000 \times \frac{x}{y} - 439 = \frac{x}{y}$$

soit :

$$999 \times \frac{x}{y} = 439$$

et donc :

$$\frac{x}{y} = \frac{439}{999}$$

Finalement :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{10\,000}\left(83\,864 + \frac{x}{y}\right) = \frac{3\,351\,223}{399\,600}$$

Par conséquent, $8,3864439439439439439439439\ldots$ est un nombre rationnel.

2. Considérons $4,289999999999\ldots$ et supposons que ce développement décimal définisse un nombre rationnel représenté par la fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Alors :

$$100 \times \frac{a}{b} = 428,9999999\ldots$$

d'où :

$$\left(100 \times \frac{a}{b}\right) - 428 = 0,999999999\ldots$$

D'après le cours de Quatrième, $\left(100 \times \frac{a}{b}\right) - 428$ est une fraction. Notons-la $\frac{x}{y}$. Alors :

$$10 \times \frac{x}{y} - 9 = 0,99999999\ldots$$

autrement dit :

$$10 \times \frac{x}{y} - 9 = \frac{x}{y}$$

soit :

$$9 \times \frac{x}{y} = 9$$

et donc :

$$\frac{x}{y} = 1$$

Finalement :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{100}\left(428 + \frac{x}{y}\right) = \frac{429}{100}$$

Par conséquent, $4,289999999999\ldots$ est un nombre rationnel. $4,28999999\ldots$ est ainsi appelé un développement décimal illimité IMPROPRE du nombre rationnel $4,29$. Ce dernier est quant à lui appelé le développement décimal limité PROPRE.

Remarque. Plus généralement, on admet le théorème suivant :

Théorème 3. *Étant donné un nombre rationnel.*

1. *S'il est décimal, alors il admet deux développements décimaux :*
   (a) *Un premier, limité, qualifié de propre ;*
   (b) *Un second, illimité avec une partie périodique valant « 9 », qualifié d'impropre.*
2. *S'il n'est pas décimal, il admet un unique développement décimal illimité, périodique, avec une période différente de « 9 ».*
   Réciproquement :
   (a) *À tout développement décimal qui est, soit limité, soit illimité avec une période de « 9 », correspond un unique nombre décimal.*
   (b) *À tout développement décimal illimité périodique, de période différente de « 9 », correspond un unique nombre rationnel non décimal.*

Démonstration. Le théorème est admis mais l'étude des deux exemples précédents nous donne une justification satisfaisante à notre niveau. □

1.3 Les nombres irrationnels

Définition 4. Un nombre est dit irrationnel s'il n'est pas rationnel. Autrement dit, un nombre est irrationnel s'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs.

Remarque. Nous pouvons effectuer deux remarques :

1. D'après le théorème 3, il est équivalent de dire qu'un nombre irrationnel est un nombre dont le développement décimal (s'il existe) est ILLIMITÉ ET NON PÉRIODIQUE.
2. Il est aisé d'imaginer un développement décimal illimité non périodique. Par exemple, le nombre $0,1234567891011121314151617\ldots$, appelé constante de Champernowne[1], admet un développement décimal illimité non périodique par construction.

1. David Gawen Champernowne est un mathématicien anglais né en 1912 et mort en 2000.

Exemple. Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 1$. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 1^2 + 1^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

d'où :

$$BC = \sqrt{2} \text{ car } BC \geqslant 0$$

Proposition 5. *$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Plus formellement, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors il existe deux nombres entiers relatifs a et b, avec b non nul, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ fraction irréductible. Par définition de la racine carrée, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, soit $\frac{a^2}{b^2} = 2$ et donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi 2 divise a^2. Si a était impair, alors a^2 le serait aussi. Or a^2 est pair. Donc a est également pair. Autrement dit, 2 divise a. Il existe donc un nombre entier relatif p tel que $a = 2p$. Mais alors $a^2 = (2p)^2 = 4p^2$. D'où $4p^2 = 2b^2$ et par suite $2p^2 = b^2$. On en déduit que 2 divise b^2 et donc b (même raisonnement que précédemment). Ainsi, a et b sont tous les deux pairs, ce qui contredit l'irréductibilité de la fraction $\frac{a}{b}$. Par conséquent, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. □

Remarque. Nous pouvons déterminer une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$:

1. $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ et $1 \leqslant 2 \leqslant 4$ donc $1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$.
2. $1,4^2 = 1,96$, $1,5^2 = 2,25$ et $1,96 \leqslant 2 \leqslant 2,25$ donc $1,4 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,5$.
3. $1,41^2 = 1,9881$, $1,42^2 = 2,0164$ et $1,9881 \leqslant 2 \leqslant 2,0164$ donc $1,41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42$
4. $1,414^2 = 1,999396$, $1,415^2 = 2,002225$ et $1,999396 \leqslant 2 \leqslant 2,002225$ donc $1,414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,415$

Ce processus d'approximation décimale pourrait se poursuivre indéfiniment. Donc $\sqrt{2}$ admet un développement décimal. Or, d'après la proposition 5, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Par conséquent, en vertu du théorème 3, le développement décimal de $\sqrt{2}$ ne peut être qu'illimité et non périodique.

Proposition 6. *Tout nombre irrationnel admet un développement décimal illimité non périodique.*

Démonstration. Soit x un nombre irrationnel. On admet l'existence d'un développement décimal pour x. D'après le théorème 3, si ce développement décimal est limité ou illimité et périodique, alors x est rationnel. Donc le développement décimal de x est nécessairement illimité et non périodique. □

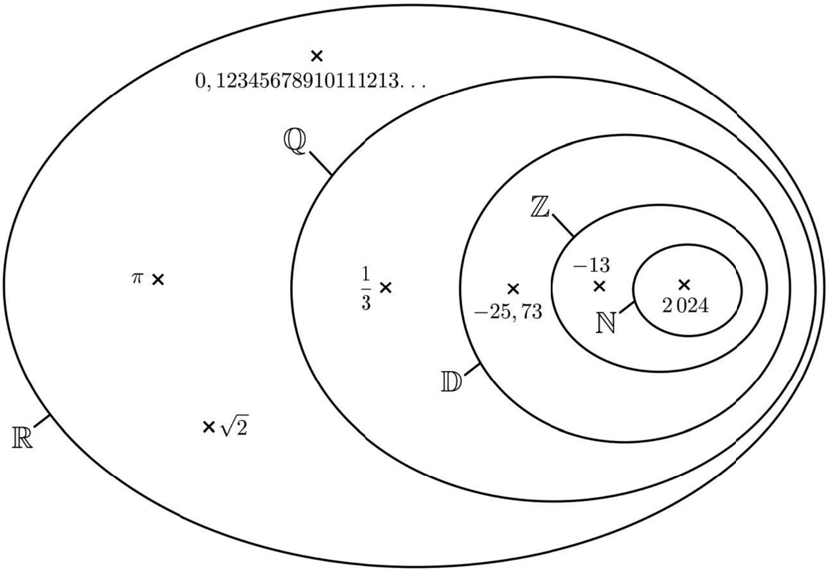
Remarque. Il existe d'autres nombres irrationnels très célèbres comme le nombre π, rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle, ou encore le nombre d'or que nous rencontrerons en exercice.

1.4 Les nombres réels

Définition 7. On appelle nombre réel tout nombre admettant un développement décimal quelconque (limité, illimité périodique ou non) c'est-à-dire une suite de chiffres en nombre fini à gauche de la virgule et en nombre quelconque à droite de celle-ci, précédée du signe $+$ ou $-$. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque. Par définition de $\mathbb{R}$, on a naturellement $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Illustration :



Proposition 8. *Pour tous nombres réels a, b et c, on a :*

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ *(associativité de l'addition).*
2. $a+b = b+a$ *(commutativité de l'addition).*
3. $a+0 = 0+a = a$ *(0 est élément neutre pour l'addition).*
4. $a+(-a) = (-a)+a = 0$ *(existence d'un opposé).*

Démonstration. La proposition est admise. L'idée est d'étendre aux nombres réels les propriétés de l'addition des nombres rationnels. □

Proposition 9. *Pour tous nombres réels a, b et c, on a :*

1. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ *(associativité de la multiplication).*
2. $a \times b = b \times a$ *(commutativité de la multiplication).*
3. $a \times 1 = 1 \times a = a$ *(1 est élément neutre pour la multiplication).*
4. $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ *($\times$ est distributive par rapport à l'addition).*
5. *Si $a \neq 0$, alors $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ (existence d'un inverse).*

Démonstration. La proposition est admise. L'idée est d'étendre aux nombres réels les propriétés de la multiplication des nombres rationnels. □

Proposition 10. *Pour tous nombres réels a, b et c, on a :*

1. *$a = b$ si, et seulement si, $a + c = b + c$.*
2. *Si $c \neq 0$, alors $a = b$ si, et seulement si, $a \times c = b \times c$.*

Démonstration. La proposition est admise. L'idée est d'étendre aux nombres réels la compatibilité de l'égalité avec l'addition et la multiplication. □

Proposition 11. *Pour tous nombres réels a et b, on a l'équivalence suivante :*

$$a \times b = 0 \text{ si, et seulement si, } a = 0 \text{ ou } b = 0$$

On dit que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est intègre.

Démonstration. $\Rightarrow$: admise.
$\Leftarrow$: découle du fait que 0 est absorbant pour la multiplication. □

Remarque. Cette proposition permet de résoudre toute équation de la forme $A \times B = 0$, appelée équation produit nul et étudiée au chapitre 8. En effet, d'après la proposition 11, l'égalité $A \times B = 0$ est équivalente à $A = 0$ ou $B = 0$. De la sorte, dans l'optique de résoudre une telle équation, il peut être pertinent de factoriser l'un des deux membres et d'annuler l'autre.

1.5 Exercices

Exercice 1

Déterminer la nature des nombres suivants :

1. $A = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
2. $B = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$
3. $C = 0,125^{-\frac{2}{3}}$
4. $D = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
5. $E = \sqrt{90 + \frac{1}{4}} - \left(91 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

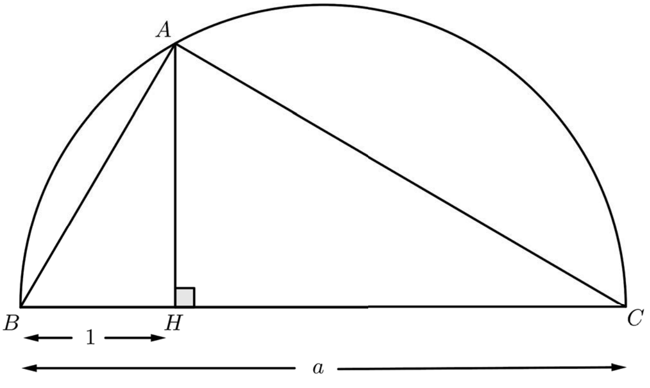
Exercice 2

Dans chaque cellule, insérer une croix si le nombre appartient à l'ensemble :

Nombres \ Ensembles	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-4					
10^{-4}					
$-8 \times 0,625$					
$\sqrt{2}$					
$-\frac{2}{3}$					
π					
$\frac{\sqrt{225}}{3}$					
10^7					
$\frac{0,121}{0,19}$					
$\sqrt{4}$					
$-0,3333$					
$\frac{19}{16}$					
$-\frac{54}{18}$					

Exercice 3

On considère un demi-cercle de diamètre $[BC]$ et un point A appartenant à ce demi-cercle tel que le projeté orthogonal H du point A sur la droite (BC) vérifie $BH = 1$. Par ailleurs, on pose $a := BC$.



1. Démontrer que $AB = \sqrt{a}$.
2. Construire un segment dont la longueur est égale au nombre d'or, $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.