Parcours et méthodes

1re T.C.

Maths

Enseignement Tronc Commun

NOUVEAUX PROGRAMMES !

LES ÉTAPES POUR RÉUSSIR

- Cours complet
- Méthodes appliquées
- Exercices et corrigés détaillés

ellipses

Chapitre 1

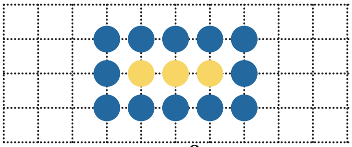
Les suites

Cours complet

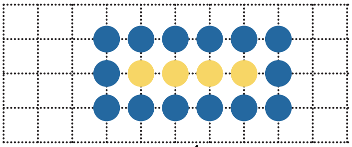
1 Les suites

1.1 Commençons

On dispose des pions jaunes sur un damier puis on les entoure de pions bleus comme sur les schémas ci-dessous.



$n = 3$



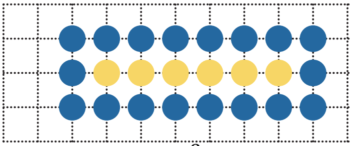
$n = 4$

On voit que pour entourer une rangée de 3 pions jaunes il faut 12 pions bleus, pour une rangée de 4 pions jaunes il faut 14 pions bleus. Posons-nous maintenant quelques questions :

1. Combien faut-il de pions bleus pour entourer 6 pions jaunes ?
2. Soit n un entier naturel non nul. Combien faut-il de pions bleus pour entourer n pions jaunes ?
3. Avec 27 pions bleus combien peut-on entourer de pions jaunes ?

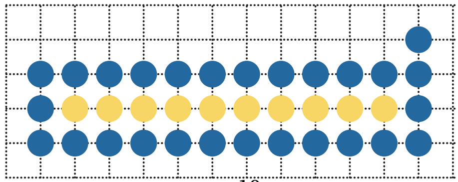
Les réponses sont :

1. On voit rapidement que 18 pions bleus sont nécessaires et suffisants pour entourer 6 pions jaunes.

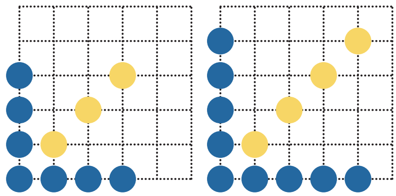
   $n = 6$

2. Pour répondre « en général », c'est-à-dire pour une rangée de n pions jaunes, on doit faire un calcul : il faut $n+2$ pions bleus au-dessus, $n+2$ pions bleus en-dessous, un pion bleu à gauche de la rangée de pions jaunes et un à droite. Cela fait donc $(n+2)+(n+2)+1+1 = 2n+6$ pions bleus.
3. 27 n'est pas de la forme $2n+6$. En fait 27 se trouve entre deux nombres de cette forme : $2 \cdot 10 + 6 = 26$ et $2 \cdot 11 + 6 = 28$, qui permettent d'entourer respectivement exactement 10 et exactement 11 pions jaunes. Avec 27 pions bleus on pourra donc entourer une rangée de 10 pions jaunes et il restera 1 pion bleu inutilisé.



$n = 10$

Examinons une deuxième situation :

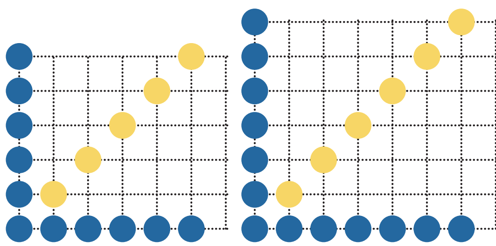
$n = 3$  $n = 4$

Posons-nous les questions :

1. Combien aurons-nous de pions bleus avec 5 ou 6 pions jaunes ?
2. Soit n un entier naturel non nul. Combien aurons-nous de pions bleus avec n pions jaunes ?
3. Peut-on obtenir 101 pions bleus ? 100 pions bleus ?

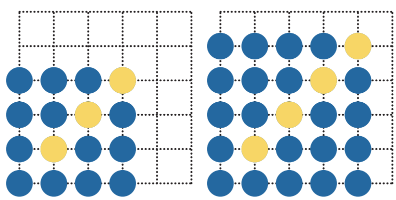
Les réponses s'apparentent à celles de la situation précédente :

1. Avec 5 pions jaunes on a 11 pions bleus, et avec 6 pions jaunes 13 pions bleus.

$n = 5$  $n = 6$

2. On a 1 pion bleu à l'origine puis n pions verticalement et autant horizontalement. Ainsi à n pions jaunes on associe $1 + n + n = 1 + 2n$ pions bleus.
3. D'après la question précédente, avec 50 pions jaunes on trouvera $2 \cdot 50 + 1 = 101$ pions bleus. Par contre, il n'existe par d'entier n tel que $2n + 1 = 100$, on ne peut pas obtenir 100 pions bleus.

Examinons une troisième situation :

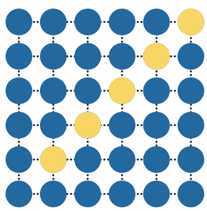
$n = 3$  $n = 4$

Reprenons les questions précédentes :

1. Combien aurons-nous de pions bleus avec 5 jaunes ?
2. Soit n un entier naturel non nul. Combien aurons-nous de pions bleus avec n pions jaunes ?
3. Peut-on obtenir 101 pions bleus ? 100 pions bleus ?

Cette fois-ci les réponses diffèrent notablement :

1. Avec 5 pions jaunes on a 31 pions bleus

   $n = 5$
   

   Si tous les pions étaient bleus il y en aurait $6 \cdot 6 = 36$, on doit ôter ce qui correspond aux pions jaunes, ce qui donne $36 - 5 = 31$.

2. En raisonnant comme précédemment : s'il n'y avait que des pions bleus, il y en aurait $(n+1)\cdot(n+1) = (n+1)^2$. En en retirant autant qu'il y a de pions jaunes, cela donne $(n+1)^2 - n$ pions bleus.

3. Peut-on trouver un entier n tel que $(n+1)^2 - n = 101$? Remarquons que $(n+1)^2 - n = 101$ équivaut à $n^2 + n + 1 = 101$ donc encore à $n^2 + n = 100$. Essayons les entiers, l'un après l'autre, en partant de 1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n^2 + n$	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132

   Ce tableau montre clairement que l'on n'obtiendra jamais ni 101, ni 100 pions bleus.

Dans chacune des situations précédentes, le nombre de pions bleus est une fonction du nombre n de pions jaunes. On pourrait ainsi noter $u(n)$, $d(n)$ et $t(n)$ le nombre de pions bleus pour n pions jaunes, respectivement dans la première, la deuxième et la troisième situation. Cependant, l'usage en mathématique, lorsque la variable est un nombre entier, est plutôt d'écrire u_n, d_n et t_n. C'est-à-dire en utilisant une notation avec **indice**.

Examinons de plus près un de ces exemples. La variable n peut prendre toute valeur entière strictement positive. On exclut 0, car ce que devrait être le résultat dans ce cas n'est pas bien clair.
Dans la première situation $u_1 = 6$, $u_2 = 10$, $u_3 = 12$, $u_4 = 14$, ... Les nombres u_n forment une liste infinie.
Il en est de même dans les autres situations. C'est ce que l'on appelle des suites numériques, que l'on abrège, très souvent, en suites.

Définition 1.1 – Suite numérique

Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$, ou une partie infinie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}, \\ n & \mapsto & u_n \end{cases}$$

Elle associe à chaque entier naturel un résultat qui, lui, n'est pas forcément entier.

Un rappel sur les ensembles de nombres, dont $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, se trouve dans ce chapitre, à la section 1.5.

Une suite peut commencer avec l'indice 0, dans ce cas ce sera bien une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Cependant elle peut aussi commencer avec un un entier plus grand que 0. On pourra, par exemple, avoir une suite débutant à $n = 4$: w_4, w_5, w_6, ..., ou à $n = 2$: a_2, a_3, a_4, ... C'est pour cela que l'on dit qu'une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ **ou une partie de** $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$.

Précisons un peu les choses, en particulier les notations :

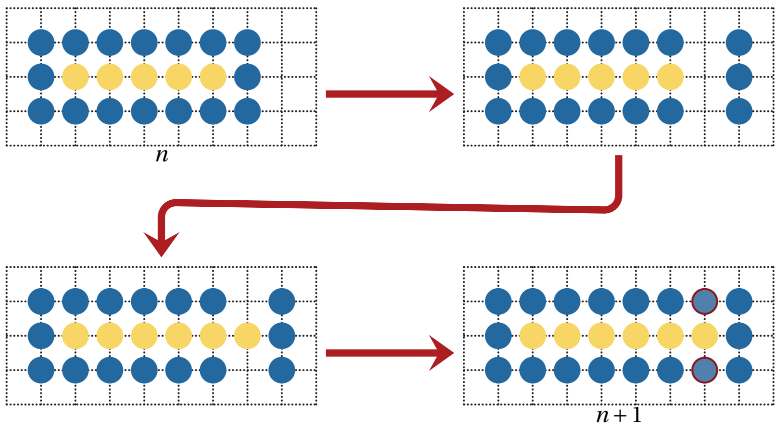
- Une suite n'est donc rien d'autre qu'une liste de termes : u_0, u_1, u_2, etc.
- Si l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ alors u_0 désigne le premier terme, u_2 le troisième terme, u_n un terme quelconque. Les termes sont juste des nombres réels.
- On dit que 0 est l'indice de u_0, 1 est l'indice de u_1 et n est l'indice de u_n.
- Il est courant qu'une suite ne commence pas à l'indice 0. Elle peut par exemple n'être définie que à partir de l'indice 3. Dans ce cas le premier terme sera u_3, le deuxième u_4, etc.
- Quant à la suite elle-même, on peut la noter de diverses manières : par une simple lettre comme u, en utilisant des parenthèses comme (u_n), ou encore, par exemple, par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque l'on veut préciser l'ensemble des indices. Dans ce dernier cas, il faut comprendre « l'ensemble des u_n pour toutes les valeurs possibles de n dans $\mathbb{N}$ ».
- Il ne faut pas confondre u_n qui est un terme de la suite, c'est-à-dire un nombre réel, avec (u_n) qui est une suite, c'est-à-dire une liste de nombres réels.

$$\underbrace{(u_0, u_{\overset{\text{un indice}}{1}}, u_2, \ldots, \overset{\text{un terme}}{u_{24}}, u_{25}, \ldots, u_n, u_{\overset{\text{un indice}}{n+1}}, \ldots)}_{\text{la suite}}$$

1.2 Les suites arithmétiques

Reprenons les trois situations précédentes.

Dans la première, on voit que si l'on connaît le nombre u_n de pions bleus pour un nombre n de pions jaunes, alors il est assez simple de trouver le nombre u_{n+1} de pions bleus lorsqu'on ajoute un pion jaune supplémentaire.

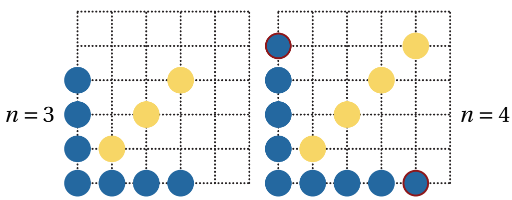


Pour chaque pion jaune de plus on doit ajouter deux pions bleus, autrement dit

$$u_{n+1} = u_n + 2.$$

Dans la deuxième situation, on a la même relation : pour chaque pion jaune supplémentaire on doit ajouter deux pions bleus, autrement dit

$$d_{n+1} = d_n + 2.$$



Ceci est différent avec la troisième situation. On a vu que pour n pions jaunes, le nombre de pions bleus nécessaires est $t_n = n^2 + n + 1$.

n	t_n	t_{n+1}	$t_{n+1} - t_n$
1	3	7	4
2	7	13	6
3	13	21	8
4	21	31	10
5	31	43	12
10	111	133	22
20	421	463	42
100	10101	10303	202

On voit que l'écart entre t_n et t_{n+1} n'est jamais constant.

Définition 1.2 – Suite arithmétique

On dit qu'une suite v est arithmétique lorsque l'écart entre deux termes consécutifs est constant. Autrement dit, v est arithmétique s'il existe une constante réelle r telle que $v_{n+1} = v_n + r$ quel que soit l'indice n.

Ainsi les deux premières situations correspondent à des suites u et d arithmétiques. Par contre, dans la troisième situation, la suite t n'est pas arithmétique.

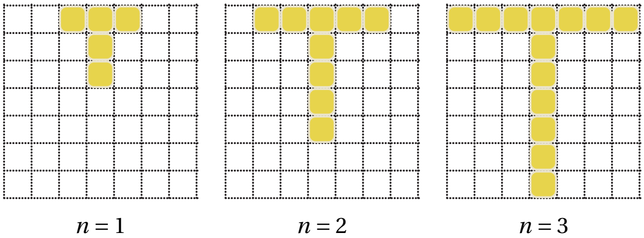
Définition 1.3 – Raison d'une suite arithmétique

Lorsqu'une suite est arithmétique, on appelle raison l'écart constant entre deux de ses termes consécutifs.

Dans la première et la deuxième situation, les suites u et d sont arithmétiques et, toutes les deux, ont 2 pour raison.

Exercice 1.1

Considérons la situation suivante :

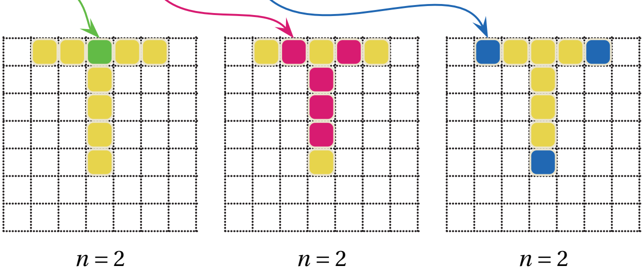


Remarquons qu'il existe trois sortes de pions jaunes :

- ceux qui ont trois voisins, c'est-à-dire qui sont adjacents à trois autres pions jaunes,
- ceux qui ont deux voisins,
- ceux qui ont un unique voisin.

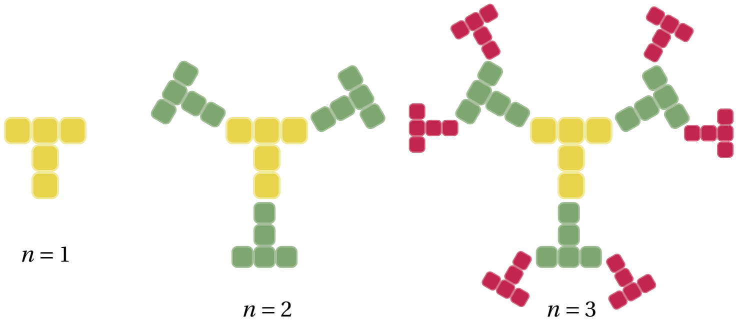
Notons p_n le nombre total de pions jaunes. Par exemple, on aura $p_1 = 5$ et $p_2 = 9$. Notons encore t_n, d_n et u_n le nombre de pions jaunes ayant respectivement trois voisins, deux voisins, un voisin.

Par exemple $t_2 = 1$, $d_2 = 5$ et $u_2 = 3$.



1. Déterminer u_4, d_4, t_4, p_4, u_5, d_5, t_5 et p_5.
2. Déterminer des formules exprimant t_n, d_n, u_n et p_n en fonction de n.
3. Parmi les quatre suites (t_n), (d_n), (u_n) et (p_n), lesquelles sont arithmétiques ? (Justifier)

Maintenant basculons sur une autre situation :



Les couleurs et les différences de taille des pions ne servent qu'à indiquer la succession des constructions. On n'en tient pas compte dans les décomptes. On conserve les notations précédentes p_n, t_n, d_n et u_n, avec les mêmes significations.

4. Déterminer les cinq premiers termes de chacune des quatre suites, autrement dit u_1, d_1, t_1, p_1, jusqu'à u_4, d_4, t_4, p_4, u_5, d_5, t_5 et p_5.
5. Déterminer des formules exprimant t_{n+1}, d_{n+1} et u_{n+1} en fonction de t_n, d_n et u_n . Exprimer u_n en fonction de n.
6. À l'aide d'un tableur, calculer les trente premières valeurs de chaque suite. En déduire qu'aucune des suites n'est arithmétique.

   Un rappel sur les tableurs se trouve en 1.4.

Exercice 1.2

Soit la formule :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \qquad \text{(SE)}$$

Celle-ci est vraie pour tout entier $n > 0$.

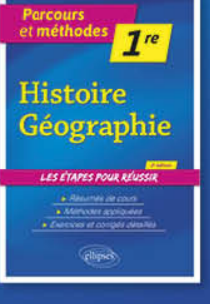
1. Qu'est-ce qui est changé si on commence par 0 au lieu de 1 ?
2. Vérifier la formule pour tous les entiers jusqu'à $n = 10$.
3. **Démontrer** la formule SE.

Parcours et *méthodes*

Parce que la méthodologie est essentielle pour réussir avec succès ses épreuves du baccalauréat et que la réforme mise en place au lycée vise un parcours de l'élève de la classe de Seconde aux études supérieures, ***Parcours et méthodes*** est la collection indispensable aux lycéens souhaitant réviser sereinement et efficacement.

Dans cet ouvrage, vous trouverez :

- Des **cours complets et documentés**, assortis de zooms spécifiques sur les éléments essentiels à retenir.
- Des **méthodes claires**, détaillant chaque point à maîtriser pour produire la meilleure des copies.
- Des **exercices corrigés** par un professeur de l'Éducation nationale.



www.editions-ellipses.fr

9 782340 082328