Claire Meyer
Gérard Meyer

Outils mathématiques pour réussir en physique

Cours et exercices corrigés

L1
L2

ellipses

Chapitre 1

Introduction au déterminant

Dans ce livre, nous allons avoir besoin de calculer des intégrales. Pour effectuer ces calculs, il est nécessaire de connaître et de savoir calculer un déterminant. Nous allons donc introduire la notion de déterminant dès à présent pour pouvoir les utiliser dans la suite au moment opportun. Nous avons choisi de présenter les déterminants non pas uniquement pour savoir les calculer mais pour comprendre d'où viennent les différentes règles de calculs des déterminants. Nous allons commencer par rappeler quelques définitions dont on va se servir très souvent dans la suite. En particulier, nous rappelons la notion de base canonique, la notion de produit scalaire euclidien et hermitien.

$\mathbf{R^2} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est l'ensemble des couples de réels.
$(a, b) \in \mathbf{R^2}$. En général, $(a, b) \neq (b, a)$.
$\mathbf{R^3} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est l'ensemble des triplets de réels.
$(a, b, c) \in \mathbf{R^3}$.
$\mathbf{R^n} = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times ... \times \mathbf{R}}_{n\ facteurs}$ est l'ensemble des n-uplets de réels.
Exemple : $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbf{R^5}$.
Les ensembles que nous utilisons le plus souvent sont : $\mathbf{R}$, $\mathbf{R^2}$, $\mathbf{R^3}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{C^2}$, $\mathbf{C^3}$.
$\mathbf{R^n}$ est un espace vectoriel de dimension n.
Un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbf{R^n}$ (ou de $\mathbf{C^n}$) peut s'écrire $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

1.1 Quelques définitions

1.1.1 Définition de la base canonique $\mathbf{R^n}$ (ou de $\mathbf{C^n}$)

Vecteurs particuliers de $\mathbf{R^n}$ (ou de $\mathbf{C^n}$) :
$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, ..., 0)$
$\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, ..., 0)$
$\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1, ..., 0)$
....
....
$\overrightarrow{e_n} = (0, 0, 0, ..., 1)$

On peut écrire : $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} + ... + x_n\overrightarrow{e_n}$.

On dit que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ constitue une base de $\mathbf{R^n}$ (ou de $\mathbf{C^n}$) et $x_1, x_2, ..., x_n$ sont les composantes de $\overrightarrow{u}$ dans cette base.
Il existe d'autres bases de $\mathbf{R^n}$ (ou de $\mathbf{C^n}$) mais celle-là est très utile et est appelée **base canonique** de $\mathbf{R^n}$ (ou de $\mathbf{C^n}$).

1.1.2 Définition du produit scalaire

On définit un **produit scalaire euclidien** sur $\mathbf{R^n}$ de la manière suivante :
si $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} + ... + x_n\overrightarrow{e_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i}$
et si $\overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + y_3\overrightarrow{e_3} + ... + y_n\overrightarrow{e_n} = \sum_{i=1}^{n} y_i\overrightarrow{e_i}$,
alors **le produit scalaire euclidien** de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = < u|v > = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$.

Remarque :
$\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_1} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + ... + 0 \times 0 = 1$.
$\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_2} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + ... + 0 \times 0 = 1$.
....
$\overrightarrow{e_n}.\overrightarrow{e_n} = 0 \times 0 + 0 \times 0 + ... + 1 \times 1 = 1$.

$\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + ... + 0 \times 0 = 0$.
....

Plus généralement, $\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$; δ_{ij} est appelé **symbole de Kronecker**.

On dit que la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est orthonormée ou orthonormale.

On définit un **produit scalaire hermitien** sur $\mathbb{C}^n$ de la manière suivante :
si $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} + ... + x_n\overrightarrow{e_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i}$
et si $\overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + y_3\overrightarrow{e_3} + ... + y_n\overrightarrow{e_n} = \sum_{i=1}^{n} y_i\overrightarrow{e_i}$,
alors **le produit scalaire hermitien** de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} =< u|v >= x_1^*y_1 + x_2^*y_2 + ... + x_n^*y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^*y_i$. x_i^* désigne le nombre complexe conjugué du nombre complexe x_i.
On a de même : $< \overrightarrow{e_i}|\overrightarrow{e_j} >= \delta_{ij}$.
$\mathbf{R^n}$ est aussi un espace affine (ensemble de points) de dimension n sur $\mathbf{R}$;
de même, $\mathbf{C^n}$ est aussi un espace affine de dimension n sur $\mathbf{C}$ (n nombres complexes $z_1, z_2, ..., z_n$).

Si O est un point quelconque de $\mathbf{R^n}$ (ou de $\mathbf{C^n}$) alors $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est un repère orthonormé de $\mathbf{R^n}$ (ou de $\mathbf{C^n}$).

Si M est un point quelconque de $\mathbf{R^n}$ (ou de $\mathbf{C^n}$), les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ sont par définition les coordonnées du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$.

1.2 Application linéaire de $\mathbf{R^n}$ dans $\mathbf{R^p}$

C'est une application f de $\mathbf{R^n}$ dans $\mathbf{R^p}$ telle que :
pour tout $\overrightarrow{u_1} \in \mathbf{R^n}$, pour tout $\overrightarrow{u_2} \in \mathbf{R^n}$, $f(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) = f(\overrightarrow{u_1}) + f(\overrightarrow{u_2})$
pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbf{R^n}$, $f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.
Exemple : $n = 3$, $p = 2$,
$f : \mathbf{R^3} \longrightarrow \mathbf{R^2}$.
$(x, y, z) \mapsto (2x - y, 3x + 4z)$ on a par exemple :
$f(4, 5, 6) = (2(4) - 5, 3(4) + 4(6)) = (3, 36)$.
Montrons que f est linéaire.

Pour tout $\overrightarrow{u_1} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbf{R^3}$, pour tout $\overrightarrow{u_2} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R^3}$,

$$\begin{aligned}
f(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) &= f[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] \\
&= f[(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)] \\
&= (2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 3(x_1 + x_2) + 4(z_1 + z_2)) \\
&= ((2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2), (3x_1 + 4z_1) + (3x_2 + 4z_2)) \\
&= (2x_1 - y_1, 3x_1 + 4z_1) + (2x_2 - y_2, 3x_2 + 4z_2) \\
&= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) \\
&= f(\overrightarrow{u_1}) + f(\overrightarrow{u_2}).
\end{aligned}$$

Pour tout $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbf{R^3}$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
f(\lambda\overrightarrow{u}) &= f[\lambda(x, y, z)] = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x - \lambda y, 3\lambda x + 4\lambda z) \\
&= (\lambda(2x - y), \lambda(3x + 4z)) = \lambda(2x - y, 3x + 4z) \\
&= \lambda f(x, y, z) = \lambda f(\overrightarrow{u}).
\end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de $\mathbf{R^3}$ dans $\mathbf{R^2}$.

1.3 Forme linéaire sur $\mathbf{R^n}$

C'est une application linéaire de $\mathbf{R^n}$ dans $\mathbf{R}$.
Exemple : $n = 3$,
$f : \mathbf{R^3} \longrightarrow \mathbf{R}$.
$(x, y, z) \mapsto 2x - 3y + 4z$.
$f(1, 2, 3) = 2(1) - 3(2) + 4(3) = 8$.

Remarque : l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbf{R^n}$ est appelé le **dual** de $\mathbf{R^n}$ et est noté $\mathbf{R^{n*}}$.

1.4 Forme bilinéaire sur $\mathbf{R^n}$

C'est une application f de $\mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$ dans $\mathbf{R}$ qui à tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$ fait correspondre le nombre réel $f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et qui est linéaire par rapport à $\overrightarrow{u}$ lorsque $\overrightarrow{v}$ est fixé et linéaire par rapport à $\overrightarrow{v}$ lorsque $\overrightarrow{u}$ est fixé.
$\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, et $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, on a pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbf{R^n}$, pour tout $\overrightarrow{u'} \in \mathbf{R^n}$, pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbf{R^n}$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,
$f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + f(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v})$.
$f(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbf{R^n}$, pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbf{R^n}$, pour tout $\overrightarrow{v'} \in \mathbf{R^n}$, pour tout $\mu \in \mathbf{R}$,
$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v'})$.

$f(\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}) = \mu f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Exemple $n = 2$,
$f : \mathbf{R^2} \times \mathbf{R^2} \longrightarrow \mathbf{R}$.
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto 2x_1y_1 - 3x_2y_2$.
Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbf{R^2} \times \mathbf{R^2}$, pour tout $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}) \in \mathbf{R^2} \times \mathbf{R^2}$,

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}) &= f((x_1, x_2) + (x_1', x_2'), (y_1, y_2)) = f((x_1 + x_1', x_2 + x_2'), (y_1, y_2)) \\ &= 2(x_1 + x_1')y_1 - 3(x_2 + x_2')y_2 = 2x_1y_1 + 2x_1'y_1 - 3x_2y_2 - 3x_2'y_2 \\ &= 2x_1y_1 - 3x_2y_2 + 2x_1'y_1 - 3x_2'y_2 \\ &= f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + f(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &= f(\lambda(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = f((\lambda x_1, \lambda x_2), (y_1, y_2)) \\ &= 2(\lambda x_1)y_1 - 3(\lambda x_2)y_2 = \lambda(2x_1y_1 - 3x_2y_2) = \lambda f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}) &= f((x_1, x_2), (y_1, y_2) + (y_1', y_2')) = f((x_1, x_2), (y_1 + y_1', y_2 + y_2')) \\ &= 2x_1(y_1, y_1') - 3x_2(y_2, y_2') = 2x_1y_1 + 2x_1y_1' - 3x_2y_2 - 3x_2y_2' \\ &= f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v'}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}) &= f((x_1, x_2), \lambda(y_1, y_2)) = f((x_1, x_2), (\lambda y_1, \lambda y_2)) \\ &= 2x_1(\lambda y_1) - 3x_2(\lambda y_2) = \lambda(2x_1y_1 - 3x_2y_2) = \lambda f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

1.4.1 Forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R^n}$

Une forme bilinéaire f sur $\mathbf{R^n}$ est symétrique lorsque :
$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbf{R^n}$, pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbf{R^n}$.
Exemple :
$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$.
$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = f((y_1, y_2), (x_1, x_2)) = 2y_1x_1 - 3y_2x_2 = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1.4.2 Forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbf{R^n}$

Une forme bilinéaire f sur $\mathbf{R^n}$ est antisymétrique lorsque :
$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbf{R^n}$, pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbf{R^n}$.
Exemple : $f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$.

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) &= f((y_1, y_2), (x_1, x_2)) = y_1x_2 - y_2x_1 = -(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= -f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

1.5 Forme trilinéaire sur $\mathbf{R^n}$

C'est une application f de $\mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$ dans $\mathbf{R}$ qui à tout triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de $\mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$ fait correspondre le nombre réel $f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et qui est linéaire par rapport à chaque variable lorsque les deux autres sont fixées.
$\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ et $\overrightarrow{w} = (z_1, z_2, ..., z_n)$.
On a donc pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbf{R^n}$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,
$f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + f(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
$f(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{w} \in \mathbf{R^n}$ et pour tout $\mu \in \mathbf{R}$,
$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{w}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{w})$.
$f(\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mu f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'} \in \mathbf{R^n}$ et pour tout $\nu \in \mathbf{R}$,
$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w'})$.
$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \nu\overrightarrow{w}) = \nu f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

1.5.1 Forme trilinéaire symétrique sur $\mathbf{R^n}$

On rappelle qu'une permutation de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ est une bijection[1] de $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ dans lui-même ; il y a $3! = 6$ permutations en tout :

$$\begin{array}{llllll}
\overrightarrow{u} \longrightarrow \overrightarrow{u} & \overrightarrow{u} \longrightarrow \overrightarrow{u} & \overrightarrow{u} \longrightarrow \overrightarrow{v} & \overrightarrow{u} \longrightarrow \overrightarrow{v} & \overrightarrow{u} \longrightarrow \overrightarrow{w} & \overrightarrow{u} \longrightarrow \overrightarrow{w} \\
\overrightarrow{v} \longrightarrow \overrightarrow{v} & \overrightarrow{v} \longrightarrow \overrightarrow{w} & \overrightarrow{v} \longrightarrow \overrightarrow{u} & \overrightarrow{v} \longrightarrow \overrightarrow{w} & \overrightarrow{v} \longrightarrow \overrightarrow{v} & \overrightarrow{v} \longrightarrow \overrightarrow{u} \\
\overrightarrow{w} \longrightarrow \overrightarrow{w} & \overrightarrow{w} \longrightarrow \overrightarrow{v} & \overrightarrow{w} \longrightarrow \overrightarrow{w} & \overrightarrow{w} \longrightarrow \overrightarrow{u} & \overrightarrow{w} \longrightarrow \overrightarrow{u} & \overrightarrow{w} \longrightarrow \overrightarrow{v}
\end{array}$$

On écrit ces permutations :
$\overrightarrow{u}\overrightarrow{v}\overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{u}\overrightarrow{w}\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{v}\overrightarrow{u}\overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{v}\overrightarrow{w}\overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{w}\overrightarrow{v}\overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{w}\overrightarrow{u}\overrightarrow{v}$

1. Application : chaque élément de l'ensemble de départ a une image et une seule dans l'ensemble d'arrivée ; si, de plus, chaque élément de l'ensemble d'arrivée a un antécédent et un seul dans l'ensemble de départ, alors l'application est bijective. Application surjective : application telle que chaque élément de l'ensemble de d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ. Application injective : application telle que chaque élément de l'ensemble de d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ.

L'ensemble de ces permutations est noté σ_3 car il y a 3 vecteurs.
σ désigne l'une quelconque des 6 permutations.
Une forme trilinéaire f est symétrique lorsque :
$f(\sigma(\overrightarrow{u}), \sigma(\overrightarrow{v}), \sigma(\overrightarrow{w})) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ pour tout $\sigma \in \sigma_3$, soit :
$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$,
$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$,
$f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}), \ldots.$

Exemple sur $\mathbf{R^4}$: $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$
$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = x_1 y_1 z_1$.

1.5.2 Forme trilinéaire antisymétrique sur $\mathbf{R^n}$

Une forme trilinéaire f sur $\mathbf{R^n}$ est antisymétrique lorsque :
$f(\sigma(\overrightarrow{u}), \sigma(\overrightarrow{v}), \sigma(\overrightarrow{w})) = \varepsilon(\sigma) f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ pour tout $\sigma \in \sigma_3$.
$\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation.
Si ν_σ désigne le nombre d'inversions de σ, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\nu_\sigma}$.

Exemples :
1 $u \longrightarrow u$ 1
2 $v \longrightarrow v$ 2
3 $w \longrightarrow w$ 3
aucune inversion : $\nu_\sigma = 0$ donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^0 = 1$

1 $u \longrightarrow u$ 1
2 $v \longrightarrow w$ 3
3 $w \longrightarrow v$ 2
une inversion : $\nu_\sigma = 1$ donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^1 = -1$

1 $u \longrightarrow v$ 2
2 $v \longrightarrow u$ 1
3 $w \longrightarrow w$ 3
une inversion : $\nu_\sigma = 1$ donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^1 = -1$

1 $u \longrightarrow v$ 2
2 $v \longrightarrow w$ 3
3 $w \longrightarrow u$ 1
deux inversions : $\nu_\sigma = 2$ donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2 = +1$

1.6 Forme p-linéaire sur $\mathbf{R^n}$

Plus généralement : on dit qu'une forme est p-linéaire sur $\mathbf{R^n}$ si elle est linéaire par rapport à chaque variable lorsque les $p-1$ autres sont fixées.

1.6.1 Forme p-linéaire symétrique sur $\mathbf{R^n}$ (ou sur $\mathbf{C^n}$)

Une forme p-linéaire sur $\mathbf{R^n}$ est symétrique si et seulement si :
$f(\overrightarrow{u}_{\sigma(1)}, \overrightarrow{u}_{\sigma(2)}, ..., \overrightarrow{u}_{\sigma(p)}) = f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ pour tout $\sigma \in \sigma_p$.

1.6.2 Forme p-linéaire antisymétrique sur $\mathbf{R^n}$ (ou sur $\mathbf{C^n}$)

Une forme p-linéaire sur $\mathbf{R^n}$ est antisymétrique si et seulement si :
$f(\overrightarrow{u}_{\sigma(1)}, \overrightarrow{u}_{\sigma(2)}, ..., \overrightarrow{u}_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ pour tout $\sigma \in \sigma_p$.

1.6.3 Forme p-linéaire alternée sur $\mathbf{R^n}$ (ou sur $\mathbf{C^n}$)

Une forme p-linéaire sur $\mathbf{R^n}$ est alternée sur $\mathbf{R^n}$ si quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$ de $\mathbf{R^n}$, $f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}) = 0$ lorsque 2 au moins des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$ sont égaux.

Remarque importante :
Si f est p-linéaire alternée sur $\mathbf{R^n}$ (ou sur $\mathbf{C^n}$) alors f est p-linéaire antisymétrique sur $\mathbf{R^n}$ (ou sur $\mathbf{C^n}$).
Réciproquement, si f est p-linéaire antisymétrique sur $\mathbf{R^n}$ (ou sur $\mathbf{C^n}$) alors f est p-linéaire alternée sur $\mathbf{R^n}$ (ou sur $\mathbf{C^n}$).