Christian GARING
Frédéric PAVIET
Pierre-Yves VIALATTE

Les Mille et Une Questions en **PRÉPA**

PHYSIQUE

2e année MP/MP*

4e ÉDITION ACTUALISÉE
+
Capacités numériques

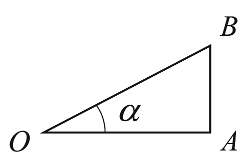
ellipses

Petit formulaire pour les calculs en physique

Équation du second degré

Avant de chercher les solutions d'une équation $ax^2+bx+c=0$, il est impératif d'obtenir des renseignements sur le signe des racines (ou de leur partie réelle) ; pour cela il suffit de voir le signe de leur somme $S=-b/a$ et de leur produit $P=c/a$.

Formules de trigonométrie



$$\sin\alpha = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{AB}{OB}, \quad \cos\alpha = \frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{OA}{OB}$$

$$\tan\alpha = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}} = \frac{AB}{OA}$$

Il faut connaître les formules de trigonométrie, en particulier : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

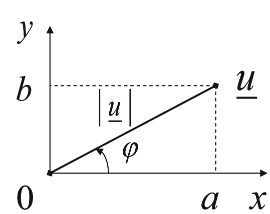
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \ ; \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \ ; \ \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \ ; \ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \quad \text{et} \quad \sin p+\sin q = 2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$$ (<u>le – d'abord</u> !)

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big) \quad \text{et} \quad \sin a\sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$

Les nombres complexes



- dans l'écriture mathématique $\underline{u}=a+\mathrm{i}b$ apparaissent les parties réelle $a=|\underline{u}|\cos\varphi$ et imaginaire $b=|\underline{u}|\sin\varphi$, avec $|\underline{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi=\arg\underline{u}=\arctan(b/a)$ (à π près, il faut en plus préciser $\sin\varphi$ ou $\cos\varphi$) soit $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$.
- en physique, on préfère souvent écrire $\underline{u}=|\underline{u}|\exp(\mathrm{i}\varphi)$ en faisant apparaître directement le module $|\underline{u}|$ et la phase (ou argument) φ.

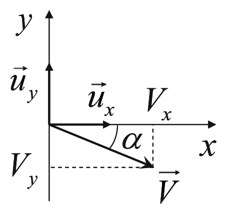
Rappel : $\left|\dfrac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right| = \dfrac{|\underline{u}_2|}{|\underline{u}_1|}$ et $\arg\dfrac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \arg\underline{u}_2 - \arg\underline{u}_1$

■ Projection d'un vecteur

Il faut particulièrement veiller aux signes des projections.

sur la figure : $V_x = \vec{V}.\vec{u}_x > 0$ et $V_y = \vec{V}.\vec{u}_y < 0$

avec $\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y$



Théorème de Pythagore : $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ car $V^2 = \vec{V}^2 = ||\vec{V}||^2$

Avec l'angle α (pris positif), $V_x = V\cos\alpha > 0$ et $V_y = -V\sin\alpha < 0$

Le théorème de Pythagore redonne $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

■ Moyenne de fonctions temporelles

Si $u(t) = u_0\cos(\omega t + \varphi)$, alors sur une période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $<u> = 0$ et $<u^2> = \dfrac{1}{2}u_0^2$

Utilisation de la notation complexe pour les grandeurs énergétiques moyennes (attention, aucune grandeur énergétique ne peut être complexe !).

Si $f(t) = f_0\cos(\omega t)$ et $g(t) = g_0\cos(\omega t + \varphi)$, alors :

$$<fg> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{f}.\underline{g}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{f}^*.\underline{g}) = \frac{1}{2}f_0 g_0\cos\varphi \quad \text{et} \quad <f^2> = \frac{1}{2}|\underline{f}|^2$$

■ Formule de Taylor à l'ordre 1

Il faut savoir faire le lien entre :

– l'écriture mathématique : $f(x_0 + h) = f(x_0) + h\dfrac{df}{dx}(x_0) + ...$

– et l'écriture physique : $u(x_0 + dx) - u(x_0) = du = \left.\dfrac{du}{dx}\right)_{x=x_0} dx + ...$

Pour x, $|x| \ll 1$, on a $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - x^2/2$, $\tan x \approx x$, $\ln(1+x) \approx x$, $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$, $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \ldots$

Et si $u(x,y)$ est une fonction de deux variables, à l'ordre 1 : $\mathrm{d}u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$

Le théorème de Schwarz indique que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

■ Une grandeur petite ne doit être prise nulle

De la même manière qu'en mathématique une fonction n'est pas « équivalente à zéro », en physique non plus une grandeur petite ne doit être prise nulle ; si elle intervient dans une fonction, il suffit (en général) de prendre le premier terme non nul du développement limité de cette fonction.

En revanche, <u>à l'ordre un</u> en ε, on a simplement $\varepsilon.f(\varepsilon) = \varepsilon\left[f(0) + f'(0)\varepsilon + ...\right] \approx \varepsilon.f(0)$.

■ Formule du binôme

Surtout appliquée aux développements limités (ε tel que $|\varepsilon| \ll 1$ est l'infiniment petit)

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \ldots$$

Par exemple : $\dfrac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$; $\dfrac{1}{1-\varepsilon} \approx 1+\varepsilon$; $\sqrt{1\pm\varepsilon} \approx 1 \pm \dfrac{\varepsilon}{2}$

Dans le cas $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = (1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{3}{8}\varepsilon^2$, il ne faut pas faire d'abord le développement limité de la racine puis celui de l'inverse, mais les deux simultanément !

■ Disque, cylindre et sphère

Disque : périmètre $2\pi r$; surface πr^2 ; élément de surface d'une couronne circulaire entre r et $r+dr$: $2\pi r dr$.

Cylindre : surface latérale $2\pi rh$; volume $\pi r^2 h$; élément de volume d'une coquille cylindrique entre r et $r+dr$: $2\pi r dr h$.

Sphère : surface $4\pi r^2$; volume $4\pi r^3/3$; élément de volume d'une coquille sphérique entre r et $r+dr$: $4\pi r^2 dr$.

■ Formules de trigonométrie hyperbolique

Relations fondamentales : $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$; $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$; $\mathrm{e}^x = \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x$

$$\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x \; ; \; (\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x)^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx) \; ; \; \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{argch}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \; ; \; \mathrm{argsh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \; ; \; \mathrm{argth}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dérivées : $\dfrac{d}{dx}\mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\, x$; $\dfrac{d}{dx}\mathrm{sh}\, x = \mathrm{ch}\, x$; $\dfrac{d}{dx}\mathrm{th}\, x = 1 - \mathrm{th}^2 x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

$$\frac{d}{dx}\coth x = 1 - \coth^2 x = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2 x} \; ; \; \frac{d}{dx}\mathrm{argch}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \; ; \; \frac{d}{dx}\mathrm{arth}\, x = \frac{1}{1-x^2}$$

Développements limités au voisinage de zéro :

$$\mathrm{ch}\, x \approx 1 + \frac{x^2}{2} \; ; \; \mathrm{sh}\, x \approx x + \frac{x^3}{6} \; ; \; \mathrm{th}\, x \approx x - \frac{x^3}{3} \; ; \; \mathrm{argth}\, x \approx x + \frac{x^3}{3}$$

■ Différentielle logarithmique

$f(x,y,z) = A\dfrac{x^\alpha y^\beta}{z^\gamma} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{df}{f} = \alpha\dfrac{dx}{x} + \beta\dfrac{dy}{y} - \gamma\dfrac{dz}{z}$ à appliquer directement

Pour s'en convaincre :

* écrire la différentielle $df = A\dfrac{y^\beta}{z^\gamma}\alpha x^{\alpha-1}dx + A\dfrac{x^\alpha}{z^\gamma}\beta y^{\beta-1}dy - Ax^\alpha y^\beta \dfrac{\gamma}{z^{\gamma+1}}dz$ puis

diviser les deux membres par $f = A\dfrac{x^\alpha y^\beta}{z^\gamma}$,

* ou passer par $\ln f = \ln A + \alpha \ln x + \beta \ln y - \gamma \ln z$ et différentier (d'où le nom).

Application : la loi de Laplace $PV^\gamma = cste \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dP}{P} + \gamma\dfrac{dV}{V} = 0$ directement.

■ Équation différentielle du premier ordre

$$\text{du type : } \tau\frac{dx}{dt} + x = x_0 \cos\omega t$$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

– **le régime transitoire** (ou libre en l'absence d'excitation $x_0\cos\omega t$) est solution de $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{\tau}$ soit $x_t(t) = A\exp(-t/\tau)$; ce régime transitoire tend vers zéro.

– **le régime forcé** (par l'excitation) est une solution particulière recherchée sous la forme d'une fonction de même pulsation ω, mais déphasée (retard φ), $x_f(t) = X\cos(\omega t - \varphi)$, soit en passant en notation complexe :

$$(i\omega\tau + 1)\underline{x} = x_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = Xe^{-i\varphi} = \frac{x_0}{1+i\omega\tau} \quad \text{d'où} \quad X = \frac{x_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \omega\tau$$

NB : La détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale $x_t(t) + x_f(t)$!

■ Équation différentielle classique du second ordre

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ admet comme solution : $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ ou $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ admet comme solution : $x(t) = a\,\mathrm{e}^{\omega t} + b\,\mathrm{e}^{-\omega t}$ ou $x(t) = A\,\mathrm{ch}\,\omega t + B\,\mathrm{sh}\,\omega t$

■ Équation différentielle du second ordre en régime forcé

$$\text{du type : } a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = e\cos(\omega t) \quad \text{où} \quad \dot{u} = \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

Les coefficients a, b et c sont constants (et positifs pour un système physique)

Le régime forcé (par l'excitation $e\cos(\omega t)$ à la pulsation ω) est une solution particulière de l'équation, elle-même de pulsation ω, mais déphasée (retard φ) sur l'excitation :

$u(t) = U\cos(\omega t - \varphi)$, soit en passant obligatoirement en **notation complexe** :

$(-a\omega^2 + bi\omega + c)\underline{u} = e \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = Ue^{-i\varphi} = \dfrac{e}{c - a\omega^2 + ib\omega}$ d'où par module et argument :

$$U = \frac{e}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{b\omega}{c - a\omega^2} \text{ (à préciser par le signe de } \sin\varphi\text{)}$$

■ Équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$\text{du type : } \quad a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = e\cos(\omega t) \quad \text{où} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

NB : la détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale !

– **le régime libre** (car l'excitation $e\cos(\omega t)$ disparaît) est solution de $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0$

L'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ avec en physique les trois constantes a, b et c positives, conduit à $S = -b/a \leq 0$ et $P = c/a \geq 0$ d'où les deux cas :

- si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (ce qui suppose un fort coefficient de frottement b), les deux racines sont réelles négatives, notées $-r_1$ et $-r_2$, d'où une solution en exponentielles décroissantes : $x(t) = A\exp(-r_1 t) + B\exp(-r_2 t)$ appelé régime transitoire (car il tend vers zéro) apériodique
- si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (ce qui suppose un faible coefficient de frottement b), les deux racines sont complexes conjuguées à partie réelle négative, notées $-r \pm i\Omega$, d'où une solution (somme des 2 exponentielles complexes) oscillatoire d'amplitude en exponentielle décroissante :

$$x(t) = \exp(-rt).(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t) \quad \text{ou} \quad x(t) = \alpha\exp(-rt).\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\text{ou} \quad x(t) = \beta\exp(r_1 t) + \gamma\exp(r_2 t) \quad (r_1 \text{ et } r_2 \text{ racines complexes})$$

appelé régime transitoire pseudopériodique

À noter que dans tous les cas, le régime transitoire disparaît (tend vers zéro). Le régime critique est celui (un peu théorique) où $\Delta = 0$.

– **le régime forcé** (par l'excitation) est solution particulière de $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = e\cos(\omega t)$; elle se cherche sous la forme d'une fonction de même pulsation, mais déphasée (retard φ) : $x(t) = X\cos(\omega t - \varphi)$, soit en passant en notation complexe :

$(-a\omega^2 + bi\omega + c)\underline{x} = e \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = Xe^{-i\varphi} = \dfrac{e}{c - a\omega^2 + ib\omega}$ d'où X et $\tan\varphi$

Chapitre 1
■ Traitement du signal ■

Les ordres de grandeur utiles

Les composants

Résistances en électronique	1 kΩ à 1 MΩ
Capacités en électronique	1 nF à 100 µF

Le matériel de TP

Temps de montée du créneau d'un GBF	dV/dt ≈ 50 V/µs
Résistance de sortie d'un GBF	50 Ω
Fréquence maximum d'un GBF	10 MHz
Bande passante d'un oscilloscope	60 MHz
Impédance d'entrée d'un oscilloscope	$R_e = 1$ MΩ // $C_e = 10$ pF

Constantes de temps des dipôles classiques

constante de temps du dipôle RC $\tau = RC$	R = 1 kΩ, C = 0,1 µF $\tau = 0{,}1$ ms
constante de temps du dipôle RL $\tau = L/R$	R = 1 kΩ, L = 10 mH $\tau = 10$ µs
fréquence d'oscillation d'un dipôle LC $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$	L ≈ 10 mH, C ≈ 0,1 µF $f_0 \approx 5$ kHz

Le cours d'abord

■ Signaux

1. En électronique, quelle est la nature physique des signaux les plus courants ?
Quel est le plus souvent utilisé ?
Quelles sont les principales caractéristiques d'un signal ?

2. Pour un signal $u(t)$ dépendant du temps, définir sur un intervalle la moyenne, et la valeur quadratique moyenne (ou RMS ou encore efficace).
Quelle est la valeur de ces grandeurs sur une période dans le cas où le signal est sinusoïdal d'amplitude U_m ?
Si le signal est la tension aux bornes d'une résistance, à quelle grandeur physique la valeur RMS est-elle liée ?

3. Quelles sont la fréquence fondamentale f et la pulsation fondamentale ω d'un signal périodique de période T ?
Qu'est-ce que la décomposition spectrale du signal, et quelles sont les fréquences présentes *a priori* dans le spectre de ce signal ?
Quelle simplification peut-on apporter dans le cas où le signal est une fonction paire ou impaire du temps ?

4. Dans le spectre d'un signal périodique de période T, quelle est l'influence concrète sur la forme de sa représentation graphique en fonction du temps :
– du terme constant, encore appelé *offset* ?
– du terme fondamental ?
– des harmoniques de rang élevé ?

■ Filtres linéaires

5. Donner la définition d'un système linéaire, continu, et invariant.

6. Donner une propriété caractéristique d'un tel système utilisant l'ensemble des fonctions sinusoïdales de pulsation ω.

7. Définir la fonction de transfert complexe d'un système linéaire ainsi que l'ordre de ce système. Comment peut-on obtenir l'équation différentielle du système ? Qu'appelle-t-on fonction de transfert opérationnelle ?

8. Qu'est-ce qu'un filtre en électronique ? Un filtre actif et un filtre passif ?

9. On peut représenter graphiquement une fonction de transfert à l'aide d'un diagramme de Bode. De quoi est-il constitué ? Quel est son intérêt ?

10. Comment est affecté qualitativement le spectre d'un signal par un filtre linéaire ?
Est-il possible de faire apparaître ou disparaître de nouvelles composantes spectrales par filtrage linéaire ? Donner des exemples concrets.

11. Qu'est-ce qu'un moyenneur et comment choisir ses paramètres ?
En donner un exemple concret très simple sur une tension en électronique.

12. Expliquer comment il est possible, en utilisant un filtre linéaire passe-bande très sélectif (à la limite raisonner avec un filtre idéal parfaitement sélectif) avec une fréquence de résonance ajustable, de construire un analyseur de Fourier permettant la mesure des amplitudes des différentes composantes spectrales d'un signal périodique. Définir des notations pour construire le raisonnement.

13. Définir un filtre intégrateur idéal. Quel est sa fonction de transfert ? Définir sa constante de temps.
Quels doivent être ses diagrammes de Bode en amplitude et en phase ?
Comment faut-il modifier ces résultats dans le cas d'un intégrateur inverseur ?
Pourquoi l'intégrateur idéal est-il un modèle inatteignable en réalité ? Par quel circuit concret à base de deux composants simples peut-on en pratique réaliser

l'intégration d'une tension ? Dans quel domaine de fréquence ? Avec quelle constante de temps ?

14. Donner un exemple concret d'un autre circuit simple du deuxième ordre qui peut être un intégrateur de tension. Préciser dans quelles conditions et avec quelle constante de temps.

15. Transposer la question **13.** en remplaçant « intégrateur » par « dérivateur ».

■ Électronique numérique

16. En quoi consiste l'opération d'échantillonnage d'un signal fonction continu du temps ? Définir la fréquence d'échantillonnage f_e.

17. Énoncer la condition de Nyquist-Shannon.

18. Quel est le principe d'un convertisseur analogique-numérique ? Quels sont ses principaux paramètres de fonctionnement ?

19. Quelles sont les caractéristiques du spectre du signal discret obtenu après échantillonnage du signal d'origine ? En particulier, quelles sont les similitudes et les différences entre le spectre du signal d'origine et le spectre du signal échantillonné ?

20. Expliquer le phénomène de repliement de spectre.

21. Quel traitement permet, sur le signal à échantillonner, de supprimer ce repliement ?

Conseils à suivre □ Erreurs à éviter

□ La notation complexe en $\exp(j\omega t)$ est très utile en électronique mais elle est n'est valable en toute rigueur qu'en régime sinusoïdal à la pulsation ω. Sinon, quelle serait la signification du ω dans l'exponentielle ? En régime variable quelconque (non sinusoïdal) il est souvent préférable de revenir aux relations linéaires du type $u_L = L\,di_L/dt$ (tension aux bornes d'une bobine) ou $i_C = dq/dt = C du_C/dt$ (courant dans un condensateur) et établir une équation différentielle dont la solution est la fonction cherchée (tension ou courant).
L'équation différentielle obtenue est bien entendu valable dans le cas du régime sinusoïdal ; étant unique, elle peut être établie dans ce cas particulier avec la notation complexe puis étendue au cas d'une fonction du temps quelconque vue comme une superposition de sinusoïdes au sens de Fourier, mais cette justification doit être présentée et elle est souvent aussi longue que le calcul direct !