Mathématiques

1re

Tronc Commun

- L'essentiel du cours
- Initiation aux outils numériques et de programmation
- Exercices progressifs appliqués à des cas pratiques
- Prolongements vers les autres matières
- Corrigés détaillés de tous les exercices

ellipses

CHAPITRE 3

Résoudre des équations

Ce que je dois savoir

◆ Équations du premier degré

Pour résoudre ce genre d'équation, on isole les termes en x dans un membre, et les termes sans x dans l'autre membre. Quand on change un terme de membre, on change sans signe.

Cas particuliers :

- Si l'on aboutit à une évidence du type $0 = 0$. L'ensemble solution est $\mathbb{R}$.
- Si l'on aboutit à une incompatibilité du type $0 = 5$. L'équation n'a pas de solution. L'ensemble solution est $\varnothing$.

Dans le cas d'équations où apparaissent des fractions, il faut d'abord réduire les deux côtés de l'équation au même dénominateur et ensuite les supprimer.

Équation produit :

Lorsqu'un produit de facteurs est nul, l'un ou l'autre des facteurs est nul.

◆ Équations du type $\dfrac{a}{x} = b$ avec b non nul

On aura alors $x = \dfrac{a}{b}$.

◆ Équations du type $x^2 = a$

Si $a < 0$ l'équation n'a pas de solution. L'ensemble solution est $\varnothing$.

Si $a = 0$ dans ce cas 0 est la seule solution.

Si $a > 0$ il y a deux solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

J'applique

◆ Équations du premier degré

1. Résoudre l'équation : $5(x + 2) - 4(3x - 2) = 5$

Réponse

On développe et on isole les termes en x dans un membre :

$5x + 10 - 12x + 8 = 5$ et $-7x = -13$ donc $x = \frac{-13}{-7} = \frac{13}{7}$.

L'ensemble solution est donc : $S = \left\{\frac{13}{7}\right\}$.

2. Résoudre l'équation produit suivante : $(5x + 10)(4x - 18) = 0$

Réponse

On aura donc : $5x + 10 = 0$ ou $4x - 18 = 0$.

Donc $5x = -10$ ou $4x = 18$ soit $x = -2$ ou $x = \frac{9}{2}$

L'ensemble solution est donc : $S = \left\{-2 ; \frac{9}{2}\right\}$.

◆ Équations du type $\frac{a}{x} = b$ avec b non nul

3. Résoudre l'équation $\frac{-9}{x} = 5$.

Réponse

On aura $x = \frac{-9}{5}$ et ainsi $S = \left\{-\frac{9}{5}\right\}$.

4. Résoudre l'équation $\frac{7}{x + 3} = 2$

Réponse

On aura $x + 3 = \frac{7}{2}$ soit $x = \frac{7}{2} - 3$ d'où $x = \frac{1}{2}$ ainsi $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

◆ Équations du type $x^2 = a$

5. Résoudre l'équation $x^2 = 5$.

Réponse

On aura $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$ ainsi $S = \{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$.

6. Résoudre l'équation $4x^2 + 9 = 0$.

Réponse

Cela conduit à $x^2 = -\frac{9}{4}$, ce qui est impossible donc $S = \varnothing$.

Dans la vie quotidienne

Un automobiliste constate que s'il ajoute 12 L d'essence à son réservoir à moitié plein, il le remplit aux $\frac{3}{4}$. Quelle est la contenance de ce réservoir ?

Réponse

Soit x la contenance du réservoir. Lorsqu'il est à moitié plein, il contient $\frac{x}{2}$ litres d'essence et lorsqu'il est au $\frac{3}{4}$, il contient $\frac{3}{4}x$ litres d'essence.

On aura donc l'équation : $\frac{x}{2} + 12 = \frac{3}{4}x$ soit $\frac{2x + 48}{4} = \frac{3x}{4}$

Et ainsi $2x + 48 = 3x$ et $x = 48$.

La contenance du réservoir est de 48 litres.

Du côté des autres matières Physique

Pour s'entraîner un cycliste monte une partie d'un col, puis revient à son point de départ. Il roule à la vitesse de 10 kmh^{-1} en montée et de 40 kmh^{-1} en descente. Calculer la distance qu'il peut monter, sachant qu'il ne dispose que de 45 minutes pour s'entraîner.

Réponse

Soit x la distance parcourue en montée. S'il roule à 10 kmh^{-1}, le temps mis pour la montée en heure sera $\frac{x}{10}$, de même le temps pour la descente sera $\frac{x}{40}$, s'il met 45 minutes soit $\frac{3}{4}$ h, on aura l'équation $\frac{x}{10} + \frac{x}{40} = \frac{3}{4}$.

Soit $\frac{4x + x}{40} = \frac{30}{40}$ d'où $5x = 30$ et $x = 6$

Il doit faire 6 km de montée pour pouvoir être revenu au point de départ en 45 minutes.

Je m'exerce

◆ Équations du premier degré

Exercice 3.1.

Résoudre les équations suivantes :

1. $3x + 7 - (2x - 5) = 6 + 2x$

2. $8(x + 3) - 4(3x - 7) = 2$

3. $x^2 - (x + 3)(x + 2) = 7$

4. $2x - 3 = \dfrac{x}{2} - \dfrac{9 - x}{3}$

5. $\dfrac{3x - 1}{4} - \dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{2x - 5}{8} + 1$

Exercice 3.2.

Résoudre les équations produit suivantes :

1. $(3x + 2)(5x - 5) = 0$

2. $(5x - 10)(4x - 18) = 0$

3. $(2x - 7)(3x - 9) = 0$

4. $(3x + 6)(x^2 + 1) = 0$

Exercice 3.3.

Mettre en équation et résoudre les problèmes suivants :

1. La somme de trois entiers naturels pairs consécutifs est 78.
Déterminer ces trois nombres.

2. Actuellement un père a 35 ans et son fils 7 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui de son fils ?

3. Un triangle équilatéral a un périmètre qui est égal au périmètre d'un carré dont le côté fait 1 cm de moins que celui du triangle. Déterminer la longueur du côté du triangle.

◆ Équations du type $\dfrac{a}{x} = b$ avec b non nul

Exercice 3.4.

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{5}{x} = 7$

2. $\dfrac{-8}{x} = 3$

3. $\dfrac{6}{x} = -2$

4. $\dfrac{-4}{x} = -8$

5. $\dfrac{4}{x + 5} = 7$

6. $\dfrac{-4}{2x + 3} = 3$

◆ Équations du type $x^2 = a$

Exercice 3.5.

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 = 9$

2. $x^2 = -5$

3. $x^2 = 7$

4. $x^2 - 1 = 0$

5. $36x^2 - 25 = 0$

6. $8x^2 + 3 = 0$

Exercice 3.6.

Calculer les dimensions d'un terrain rectangulaire dont la longueur est le triple de la largeur et dont l'aire est 2 700 m^2.

Pour m'aider à démarrer

Exercice 3.1. Bien faire attention à bien distribuer les signes moins lors des développements.

Exercice 3.2. Utiliser la règle du produit de facteur nul.

Exercices 3.3. et 3.6. Bien poser son inconnue au départ.

Exercice 3.4. et 3.5. Exercices d'application directe.

Je vérifie mes résultats

Exercice 3.1.

1. $3x + 7 - (2x - 5) = 6 + 2x$.

En développant, on obtient : $3x + 7 - 2x + 5 = 6 + 2x$.

D'où : $3x - 2x - 2x = 6 - 7 - 5$ et $-x = -6$ ainsi $x = 6$.

L'ensemble solution est : $S = \{6\}$.

2. $8(x + 3) - 4(3x - 7) = 2$.

$8x + 24 - 12x + 28 = 2$ soit $-4x = -50$ et $x = \dfrac{25}{2}$.

L'ensemble solution est : $S = \left\{\dfrac{25}{2}\right\}$.

3. $x^2 - (x+3)(x+2) = 7$.

En développant, on obtient : $x^2 - (x^2 + 3x + 2x + 6) = 7$.

soit : $x^2 - x^2 - 5x - 6 = 7$ les termes en du second degré disparaissent et on obtient : $-5x = 13$ et $x = -\frac{13}{5}$.

L'ensemble solution est : $S = \left\{-\frac{13}{5}\right\}$.

4. $2x - 3 = \frac{x}{2} - \frac{9-x}{3}$.

En réduisant les deux membres au même dénominateur, on a :

$\frac{6(2x-3)}{6} = \frac{3x - 2(9-x)}{6}$.

En supprimant les dénominateurs, on a : $12x - 18 = 3x - 18 + 2x$.

Et $12x - 3x - 2x = -18 + 18$ d'où $7x = 0$ et $x = 0$.

L'ensemble solution est : $S = \{0\}$.

5. $\frac{3x-1}{4} - \frac{x+1}{2} = \frac{2x-5}{8} + 1$.

En réduisant les deux membres au même dénominateur, on a :

$\frac{2(3x-1) - 4(x+1)}{8} = \frac{2x - 5 + 8}{8}$.

En supprimant les dénominateurs, on a : $6x - 2 - 4x - 4 = 2x + 3$.

Et $0x = 9$, ce qui est faux, l'équation est donc impossible.

L'ensemble solution est : $S = \varnothing$.

Exercice 3.2.

1. $(3x+2)(5x-5) = 0$.

Un produit de facteur est nul si l'un ou l'autre des facteurs est nul, ainsi on aura : $3x + 2 = 0$ ou $5x - 5 = 0$ soit $x = -\frac{2}{3}$ ou $x = 1$.

L'ensemble solution est donc : $S = \left\{-\frac{2}{3} ; 1\right\}$.

2. $(5x - 10)(4x - 18) = 0$.

On aura :$5x - 10 = 0$ ou $4x - 18 = 0$ soit $x = 2$ ou $x = \frac{9}{2}$.

L'ensemble solution est donc : $S = \left\{2\,;\,\frac{9}{2}\right\}$.

3. $(2x - 7)(3x - 9) = 0$.

On aura : $2x - 7 = 0$ ou $3x - 9 = 0$ soit $x = \frac{7}{2}$ ou $x = 3$.

L'ensemble solution est donc : $S = \left\{3\,;\,\frac{7}{2}\right\}$.

4. $(3x + 6)(x^2 + 1) = 0$.

On aura : $3x + 6 = 0$ ou $x^2 + 1 = 0$.

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution car elle conduit à $x^2 = -1$ qui est impossible (un carré étant toujours positif ou nul).

Il reste donc : $3x + 6 = 0$ d'où $x = -2$.

L'ensemble solution est donc : $S = \{-2\}$

Exercice 3.3.

1. Soit x le premier de ces 3 nombres pairs, le second sera $x + 2$ et le troisième $x + 4$.

Ainsi on aura : $x + x + 2 + x + 4 = 78$ soit $3x + 6 = 78$ et $x = \frac{72}{3} = 24$.

Ces trois nombres sont : 24 ; 26 et 28.

2. Dans x années, l'âge du père sera $35 + x$ et celui du fils sera $7 + x$.

L'âge du père sera le double de celui du fils lorsque : $35 + x = 2(7 + x)$ soit $35 + x = 14 + 2x$ et $x = 21$.

Dans 21 ans, le père aura 56 ans, son fils 28 ans, l'âge du père sera bien le double de l'âge du fils.

3. Soit x la longueur du côté du triangle équilatéral, son périmètre est $3x$

La longueur du côté du carré est $x - 1$, son périmètre est $4(x - 1)$.

On a donc l'égalité $3x = 4(x - 1)$ et $3x = 4x - 4$ et $x = 4$.

Le côté du triangle a pour longueur 4 cm et celui du carré 3 cm.

Exercice 3.4.

1. $\frac{5}{x} = 7$ donc $x = \frac{5}{7}$ et $S = \left\{\frac{5}{7}\right\}$.

2. $\dfrac{-8}{x} = 3$ donc $x = \dfrac{-8}{3}$ et $S = \left\{-\dfrac{8}{3}\right\}$.

3. $\dfrac{6}{x} = -2$ donc $x = \dfrac{6}{-2} = -3$ et $S = \{-3\}$.

4. $\dfrac{-4}{x} = -8$ donc $x = \dfrac{-4}{-8} = \dfrac{1}{2}$ et $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

5. $\dfrac{4}{x+5} = 7$ donc $x + 5 = \dfrac{4}{7}$ d'où $x = \dfrac{4}{7} - 5 = \dfrac{4-35}{7} = -\dfrac{31}{7}$ et $S = \left\{-\dfrac{31}{7}\right\}$.

6. $\dfrac{-4}{2x+3} = 3$ donc $2x + 3 = \dfrac{-4}{3}$ d'où $2x = -\dfrac{4}{3} - 3 = -\dfrac{13}{3}$ soit $x = -\dfrac{13}{6}$

et $S = \left\{-\dfrac{13}{6}\right\}$.

Exercice 3.5.

1. $x^2 = 9$ conduit à $x = \sqrt{9} = 3$ ou $x = -3$ d'où $S = \{-3\,;3\}$.

2. $x^2 = -5$ est impossible donc $S = \varnothing$.

3. $x^2 = 7$ conduit à $x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$ d'où $S = \{-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\}$.

4. $x^2 - 1 = 0$ conduit à $x^2 = 1$ et $x = 1$ ou $x = -1$ d'où $S = \{-1\,;1\}$.

5. $36x^2 - 25 = 0$ conduit à $x^2 = \dfrac{25}{36}$ et $x = \dfrac{5}{6}$ ou $x = -\dfrac{5}{6}$ d'où $S = \left\{-\dfrac{5}{6}\,;\dfrac{5}{6}\right\}$.

6. $8x^2 + 3 = 0$ conduit à $x^2 = -\dfrac{3}{8}$ ce qui est impossible donc $S = \varnothing$.

Exercice 3.6.

Soit x la largeur du rectangle, sa longueur est donc $3x$. Sa surface est donc $3x^2$.

On a alors $3x^2 = 2\,700$ et $x^2 = 900$ et ainsi $x = 30$ seule solution à retenir.

Les dimensions du terrain sont donc : largeur 30 m et longueur 90 m.