

COURS COMPLET ET DÉTAILLÉ

DE

MATHS

MP & MPI

**Pour avoir des connaissances solides
et organiser son raisonnement**

Julian Palacios



Table des matières

1	Structures algébriques usuelles	21
1.1	Compléments sur les groupes	21
1.1.1	Intersection de sous-groupes	21
1.1.2	Sous-groupe engendré par une partie	21
1.1.3	Partie génératrice d'un groupe	22
1.1.4	Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$	22
1.1.5	Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$	22
1.1.6	Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	25
1.1.7	Groupe monogène, groupe cyclique	26
1.1.8	Le groupe des racines n -ièmes de l'unité	26
1.1.9	Groupe monogène infini	26
1.1.10	Groupe monogène fini	27
1.1.11	Ordre d'un élément d'un groupe	28
1.1.12	Élément d'ordre fini	28
1.1.13	Groupe fini	28
1.2	Compléments sur les anneaux	30
1.2.1	Produit fini d'anneaux	30
1.2.2	Idéal d'un anneau commutatif	31
1.2.3	Somme d'idéaux	31
1.2.4	Morphisme d'anneaux	32
1.2.5	Noyau d'un morphisme d'anneaux	32
1.2.6	Idéal engendré par un élément	32
1.2.7	Divisibilité dans un anneau commutatif intègre	33
1.2.8	Divisibilité et idéaux	33
1.3	Idéaux de \mathbb{Z}	33
1.3.1	Idéaux de \mathbb{Z}	33
1.3.2	Sous-groupe de \mathbb{Z}	34
1.3.3	PGCD de $n \geq 2$ entiers relatifs	34
1.3.4	Relation de Bézout	34
1.4	Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	35
1.4.1	Structure de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	35
1.4.2	Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	36
1.4.3	Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps	36
1.4.4	Théorème chinois	37
1.4.5	L'indicatrice d'Euler	38

- 1.4.6 Calcul de l'indicatrice d'Euler 39
- 1.4.7 Théorème d'Euler 40
- 1.4.8 Le petit théorème de Fermat 40
- 1.5 Anneau $\mathbb{K}[X]$ 41
 - 1.5.1 Idéaux de $\mathbb{K}[X]$ 41
 - 1.5.2 PGCD 43
 - 1.5.3 Relation de Bézout 44
 - 1.5.4 Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ 44
 - 1.5.5 Quelques résultats sur les polynômes irréductibles 44
 - 1.5.6 Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires 46
 - 1.5.7 Le théorème de d'Alembert-Gauss 48
 - 1.5.8 Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ 50
- 1.6 Algèbres 52
 - 1.6.1 Algèbre 52
 - 1.6.2 Sous-algèbre 52
 - 1.6.3 Morphismes d'algèbres 52
- 2 Réduction des endomorphismes 53**
 - 2.1 Compléments d'algèbre linéaire 53
 - 2.1.1 Somme 53
 - 2.1.2 Somme directe 53
 - 2.1.3 Caractérisation des sommes directes 54
 - 2.1.4 Projecteurs associés 54
 - 2.1.5 Dimension d'une somme d'espaces vectoriels 54
 - 2.1.6 Dimension d'une somme directe de sous-espaces 55
 - 2.1.7 Base adaptée à une décomposition en somme directe 57
 - 2.1.8 Décomposition d'un endomorphisme 58
 - 2.1.9 Matrices définies par blocs 59
 - 2.1.10 Interprétation géométrique des blocs 59
 - 2.1.11 Opérations par blocs de tailles compatibles 59
 - 2.1.12 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs 60
 - 2.2 Éléments propres d'un endomorphisme 61
 - 2.2.1 Sous-espace stable d'un endomorphisme 61
 - 2.2.2 Endomorphisme induit 62
 - 2.2.3 Droite stable pour un endomorphisme 62
 - 2.2.4 Valeur propre 62
 - 2.2.5 Le spectre 62
 - 2.2.6 Vecteur propre 63
 - 2.2.7 Sous-espace propre 63
 - 2.2.8 Somme de sous-espaces propres 63
 - 2.2.9 Majoration du cardinal du spectre 65
 - 2.2.10 Stabilité par commutation 65
 - 2.2.11 Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée 65
 - 2.2.12 Matrice semblable et spectre 66
 - 2.2.13 Spectre et sous-corps 66

2.3	Polynôme caractéristique	67
2.3.1	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	67
2.3.2	Coefficient de degré zéro du polynôme caractéristique	67
2.3.3	Le degré, le coefficient dominant et le coefficient de degré $n - 1$ du polynôme caractéristique	68
2.3.4	Matrices semblables et polynôme caractéristique	68
2.3.5	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	69
2.3.6	Valeurs propres et racines du polynôme caractéristique	69
2.3.7	Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire	70
2.3.8	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit	70
2.3.9	Multiplicité d'une valeur propre	71
2.3.10	Majoration de la dimension du sous-espace propre	71
2.4	Endomorphismes diagonalisables	71
2.4.1	Définition	71
2.4.2	Propriété de la base de diagonalisation	72
2.4.3	Projecteur	72
2.4.4	Symétrie	72
2.4.5	La somme des sous-espaces propres	73
2.4.6	Critère de diagonalisabilité	74
2.4.7	Matrice diagonalisable	74
2.4.8	Cas d'un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes	75
2.4.9	Polynôme scindé à racines simples	75
2.4.10	Critère de diagonalisation	75
2.5	Endomorphismes trigonalisables	79
2.5.1	Définition en version endomorphisme	79
2.5.2	Définition en version matricielle	80
2.5.3	Critère de trigonalisation	80
2.5.4	Expression de la trace et du déterminant	81
2.6	Matrices ou endomorphismes nilpotents	85
2.6.1	Endomorphisme nilpotent	85
2.6.2	Matrice nilpotente	85
2.6.3	Caractérisation des endomorphismes nilpotents	85
2.6.4	Endomorphisme nilpotent et polynôme caractéristique	86
2.6.5	Indice de nilpotence	86
2.6.6	Majoration de l'indice de nilpotence	87
2.7	Polynômes d'un endomorphisme	88
2.7.1	Un morphisme d'algèbres	88
2.7.2	Idéal annulateur	89
2.7.3	$\mathbb{K}[u]$	90
2.7.4	Polynôme minimal	90
2.7.5	Une base de $\mathbb{K}[u]$	91
2.7.6	Valeur propre et racine d'un polynôme annulateur	91
2.7.7	Les racines de π_u	92
2.8	Lemme de décomposition des noyaux	92

- 2.8.1 Pour deux polynômes 92
- 2.8.2 Lemme de décomposition des noyaux 93
- 2.9 Polynômes annulateurs et réduction 94
 - 2.9.1 Un critère pour être diagonalisable 94
 - 2.9.2 Polynôme minimal et diagonalisabilité 94
 - 2.9.3 Traduction matricielle 95
 - 2.9.4 Polynôme minimal d'un endomorphisme induit 95
 - 2.9.5 Endomorphisme induit d'un endomorphisme diagonalisable 95
- 2.10 Théorème de Cayley-Hamilton 96
 - 2.10.1 La matrice compagnon 96
 - 2.10.2 Le polynôme caractéristique de la matrice compagnon 96
 - 2.10.3 Le théorème de Cayley-Hamilton 97
 - 2.10.4 Divisibilité entre polynôme minimal et polynôme caractéristique 98
 - 2.10.5 Un critère pour être trigonalisable 98
 - 2.10.6 Sous-espaces caractéristiques 99
 - 2.10.7 Décomposition de E 99
 - 2.10.8 Traduction matricielle de cette décomposition 100
- 2.11 Sujet de concours 101

- 3 Endomorphismes d'un espace euclidien 121**
 - 3.1 Adjoint d'un endomorphisme 121
 - 3.1.1 Représentation des formes linéaires dans un espace euclidien 121
 - 3.1.2 Adjoint d'un endomorphisme 122
 - 3.1.3 Linéarité du passage à l'adjoint 122
 - 3.1.4 Adjoint d'une composée 123
 - 3.1.5 Involutivité du passage à l'adjoint 123
 - 3.1.6 Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée 123
 - 3.1.7 Déterminant de l'adjoint 124
 - 3.1.8 Sous-espaces stables par l'adjoint 124
 - 3.2 Matrices orthogonales 125
 - 3.2.1 Définition 125
 - 3.2.2 Les colonnes d'une matrice orthogonale 125
 - 3.2.3 Les lignes d'une matrice orthogonale 125
 - 3.2.4 Matrice de changement de base orthonormée 125
 - 3.2.5 Matrices orthogonalement semblables 126
 - 3.2.6 Groupe orthogonal 126
 - 3.2.7 Matrice orthogonale positive ou négative 126
 - 3.2.8 Orientation d'un espace euclidien 127
 - 3.3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien 127
 - 3.3.1 Isométrie vectorielle 127
 - 3.3.2 Exemple, symétrie 127
 - 3.3.3 Conservation du produit scalaire 128
 - 3.3.4 L'image d'une base orthonormée 128
 - 3.3.5 L'adjoint d'une isométrie vectorielle 129

3.3.6	Groupe orthogonal	129
3.3.7	Déterminant d'une isométrie	130
3.3.8	Isométrie directe et indirecte	130
3.3.9	Groupe spécial orthogonal	130
3.4	Isométries vectorielles en dimension 2	130
3.4.1	Description des matrices orthogonales directes en dimension 2	130
3.4.2	Description des matrices orthogonales indirectes de taille 2	131
3.4.3	Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté	132
3.4.4	Mesure d'un angle orienté de vecteurs	132
3.4.5	Morphisme de \mathbb{R} dans $SO_2(\mathbb{R})$	133
3.4.6	Isomorphisme de \mathbb{U} sur $SO_2(\mathbb{R})$	134
3.4.7	Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif	135
3.4.8	Classification des isométries vectorielles du plan euclidien	135
3.5	Réduction des isométries	136
3.5.1	Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable	136
3.5.2	Stabilité d'un espace de dimension 1 ou 2	136
3.5.3	Réduction d'une isométrie en base orthonormée	137
3.5.4	Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe dans un espace euclidien de dimension 3	138
3.6	Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	139
3.6.1	Endomorphisme autoadjoint	139
3.6.2	Restriction d'un endomorphisme autoadjoint	140
3.6.3	Stabilité de l'orthogonal	140
3.6.4	Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée	141
3.6.5	Les projecteurs orthogonaux	141
3.6.6	Le théorème spectral	142
3.7	Matrices symétriques positives et définies positives	143
3.7.1	Endomorphismes autoadjoints positifs	143
3.7.2	Endomorphismes autoadjoints définis positifs	144
3.7.3	Matrice symétrique positive	145
3.7.4	Matrice symétrique définie positive	146
4	Topologie des espaces vectoriels normés	147
4.1	Normes et espaces vectoriels normés	147
4.1.1	Norme	147
4.1.2	Notation	147
4.1.3	Vecteur unitaire	147
4.1.4	Premier calcul	148
4.1.5	Exemples	148
4.1.6	Distance associée à une norme	150
4.1.7	Boule fermée	150
4.1.8	Boule ouverte	150
4.1.9	Sphère	151

4.1.10	Partie convexe	151
4.1.11	Fonction bornée	152
4.1.12	Norme associée à un produit scalaire	152
4.1.13	La norme 2	153
4.1.14	Norme de la convergence uniforme	153
4.1.15	Un calcul de sup	153
4.1.16	Norme de la convergence en moyenne	154
4.1.17	La norme de convergence en moyenne quadratique	155
4.1.18	Produit fini d'espaces vectoriels normés	155
4.2	Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	155
4.2.1	Suite convergente	155
4.2.2	Suite divergente	155
4.2.3	Unicité de la limite	156
4.2.4	Suite bornée	156
4.2.5	Opérations algébriques sur les limites	157
4.2.6	Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés	157
4.2.7	Suites extraites	158
4.3	Comparaison des normes	159
4.3.1	Normes équivalentes	159
4.3.2	Une relation d'équivalence	159
4.3.3	Invariance du caractère borné	160
4.3.4	Invariance de la convergence d'une suite	160
4.3.5	Critère séquentiel de non équivalence de deux normes	161
4.4	Topologie	161
4.4.1	Un ouvert	161
4.4.2	Stabilité par réunion	162
4.4.3	Exemple de la boule ouverte	162
4.4.4	Stabilité par intersection finie	163
4.4.5	Un produit fini d'ouverts	163
4.4.6	Voisinage d'un point	163
4.4.7	Fermé d'un espace vectoriel normé	164
4.4.8	Stabilité des fermés par intersection quelconque	164
4.4.9	Stabilité des fermés par réunion finie	164
4.4.10	Exemples de fermés	164
4.4.11	Point intérieur	166
4.4.12	Point adhérent	166
4.4.13	Frontière	166
4.4.14	Caractérisation séquentielle des points adhérents	167
4.4.15	Caractérisation séquentielle des fermés	167
4.4.16	Partie dense	168
4.4.17	Invariance des notions topologiques	168
4.4.18	Topologie induite	168
4.5	Étude locale d'une application, continuité	169
4.5.1	Limite en un point adhérent à une partie	169
4.5.2	Caractérisation séquentielle	169
4.5.3	Extensions, limite en l'infini	170

4.5.4	Applications à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés	170
4.5.5	Opérations algébriques sur les limites	171
4.5.6	Limite d'une composée	172
4.5.7	Continuité	172
4.5.8	Caractérisation séquentielle de la continuité	172
4.5.9	Opérations sur les applications continues	173
4.5.10	Composition	173
4.5.11	Continuité et densité.	173
4.5.12	Image réciproque d'un ouvert par une application continue	174
4.5.13	Image réciproque d'un fermé par une application continue	174
4.5.14	Applications uniformément continues	174
4.5.15	Application lipschitziennes	175
4.5.16	Distance d'un point à une partie	175
4.6	Applications linéaires continues	176
4.6.1	Critère de continuité d'une application linéaire	176
4.6.2	Notation	177
4.6.3	Norme subordonnée	177
4.6.4	Sous-multiplicativité	181
4.6.5	Normes matricielles	181
4.6.6	Applications multilinéaires continues	186
4.7	Parties compactes d'un espace normé	187
4.7.1	Définition	187
4.7.2	Un compact est fermé et borné	187
4.7.3	Fermé d'un compact	188
4.7.4	Critère de convergence d'une suite d'un compact	188
4.7.5	Produit d'une famille finie de compacts	189
4.8	Application continue sur une partie compacte	189
4.8.1	Image continue d'une partie compacte	189
4.8.2	Théorème de Heine	189
4.8.3	Le théorème des bornes atteintes	190
4.9	Connexité par arcs	191
4.9.1	Deux points reliés	191
4.9.2	Une relation d'équivalence	191
4.9.3	Composantes connexes par arcs	192
4.9.4	Connexe par arcs	192
4.9.5	Partie étoilée	192
4.9.6	Connexe par arcs de \mathbb{R}	193
4.9.7	Image d'un connexe par arcs	193
4.10	Espaces vectoriels normés de dimension finie	194
4.10.1	Compact de \mathbb{R}	194
4.10.2	Un compact de $(\mathbb{R}^n, \ \cdot\ _\infty)$	194
4.10.3	Identification de la boule fermée pour la norme infinie	194
4.10.4	Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \ \cdot\ _\infty)$	195
4.10.5	Equivalence des normes	195

4.10.6	Invariance topologique	197
4.10.7	Convergence d'une suite	197
4.10.8	Compact en dimension finie	198
4.10.9	Suite bornée	198
4.10.10	Sous-espace vectoriel de dimension finie.	198
4.10.11	Continuité d'une application linéaire	199
4.10.12	Continuité des applications polynomiales	200
4.10.13	Continuité des applications multilinéaires	201
5	Séries numériques et vectorielles	203
5.1	Séries	203
5.1.1	Sommes partielles	203
5.1.2	Convergence d'une série	203
5.1.3	Somme et restes d'une série convergente	204
5.1.4	Linéarité de la somme	204
5.1.5	Divergence grossière	204
5.1.6	Lien suite-série et séries télescopiques	205
5.1.7	Série absolument convergente	205
5.2	Compléments sur les séries numériques	206
5.2.1	Technique de comparaison série intégrale	206
5.2.2	Règle de d'Alembert	210
5.2.3	Sommation des relations de comparaison en cas de convergence.	210
5.2.4	Sommation des relations de comparaison en cas de divergence.	211
5.2.5	Le théorème de Cesàro	213
6	Suites et séries de fonctions	215
6.1	Convergence simple et convergence uniforme	215
6.1.1	Convergence simple	215
6.1.2	Convergence uniforme	215
6.1.3	Convergence simple et convergence uniforme	216
6.2	Continuité et double limite	216
6.2.1	Continuité en un point	216
6.2.2	Continuité	217
6.2.3	Théorème de la double limite	217
6.3	Intégration d'une limite uniforme sur un segment	219
6.3.1	Intégrale d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie	219
6.3.2	Sommes de Riemann	220
6.3.3	Inégalité triangulaire	221
6.3.4	Intégration d'une suite de fonctions	222
6.4	Dérivation d'une suite de fonctions	223
6.4.1	Fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^k	223
6.4.2	Fonctions vectorielle de classe \mathcal{C}^1 et convergence uniforme	223
6.4.3	Fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^k et convergence uniforme	224
6.5	Séries de fonctions	225
6.5.1	La somme partielle	225
6.5.2	Convergence simple	226

6.5.3	Convergence uniforme	226
6.5.4	Le reste	226
6.5.5	Convergence uniforme et restes	226
6.5.6	Convergence normale	228
6.5.7	Continuité	229
6.5.8	Intégration	230
6.5.9	Dérivation	230
6.5.10	Fonctions de classe C^k	231
6.6	Approximation uniforme	232
6.6.1	Fonctions en escalier sur un segment	232
6.6.2	Fonctions continues par morceaux	232
6.6.3	Approximation uniforme	232
6.6.4	Le théorème de Weierstrass	234
7	Séries entières	237
7.1	Généralités	237
7.1.1	Série entière de la variable réelle	237
7.1.2	Série entière de la variable complexe	237
7.1.3	Le lemme d'Abel	237
7.1.4	Rayon de convergence	238
7.1.5	Disque ouvert de convergence	238
7.1.6	Intervalle ouvert de convergence	238
7.1.7	Théorème de comparaison	239
7.1.8	La règle de d'Alembert	239
7.1.9	Somme de deux séries entières	240
7.1.10	Produit de Cauchy de deux séries entières	240
7.2	Continuité de la somme d'une série entière	241
7.2.1	Convergence normale	241
7.2.2	Continuité	241
7.3	Régularité de la somme d'une série entière	242
7.3.1	Le théorème d'Abel radial	242
7.3.2	Rayon de convergence de la série des dérivées	243
7.3.3	Dérivation	244
7.3.4	La somme d'une série entière est de classe C^∞	248
7.3.5	Expression des coefficients d'une série entière	248
7.3.6	Unicité des coefficients	249
7.4	Fonctions développables en série entière	250
7.4.1	Fonction développable en série entière	250
7.4.2	Série de Taylor	250
7.4.3	Développement en série entière de l'exponentielle sur \mathbb{C}	251
7.4.4	Développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$ sur $D(0, 1)$	254
7.4.5	Développement en série entière du cosinus hyperbolique et du sinus hyperbolique sur \mathbb{R}	254
7.4.6	Développement en série entière du cosinus et du sinus sur \mathbb{R}	255
7.4.7	La fonction artangente	256
7.4.8	Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] -1, 1[$	257

7.4.9	Développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$	257
8	Fonctions vectorielles	261
8.1	Fonction vectorielle	261
8.1.1	Définition	261
8.1.2	Dérivabilité en un point	261
8.1.3	Caractérisation par le développement limité	261
8.1.4	Coordonnées	262
8.1.5	Dérivabilité	263
8.2	Opérations sur les fonctions dérivables	263
8.2.1	Combinaison linéaire de fonctions dérivables	263
8.2.2	Application linéaire et dérivabilité	264
8.2.3	Application bilinéaire et dérivabilité	264
8.2.4	Application multilinéaire et dérivabilité	265
8.2.5	Dérivabilité et composition	265
8.2.6	Applications de classe C^k	266
8.3	Intégration sur un segment	266
8.3.1	Linéarité de l'intégrale	266
8.3.2	Relation de Chasles	267
8.3.3	Application linéaire et intégrale	267
8.4	Intégrale fonction de sa borne supérieure	268
8.4.1	Théorème fondamental du calcul intégral	268
8.4.2	Inégalité des accroissements finis	268
8.5	Formules de Taylor	269
8.5.1	Formule de Taylor avec reste intégral	269
8.5.2	Inégalité de Taylor-Lagrange	270
8.5.3	Formule de Taylor-Young	270
9	Intégrations sur un intervalle quelconque	273
9.1	Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$	273
9.1.1	Fonction continue par morceaux	273
9.1.2	Définition	273
9.1.3	Dérivation en cas de convergence	273
9.1.4	Cas des fonctions à valeurs positives	274
9.1.5	Théorème de comparaison	275
9.1.6	L'intégrale de Riemann	275
9.1.7	Intégrale de l'exponentielle	276
9.2	Intégrabilité sur $[a, +\infty[$	276
9.2.1	Fonction intégrable	276
9.2.2	Théorème d'absolue convergence	277
9.2.3	Théorème de comparaison	277
9.3	Intégrales généralisées sur un intervalle	278
9.3.1	Définition de la convergence	278
9.3.2	Linéarité de l'intégrale	280
9.3.3	Positivité de l'intégrale	280
9.3.4	Croissance	280
9.3.5	Relation de Chasles	280

9.3.6	Intégration par parties sur un intervalle quelconque	281
9.3.7	Changement de variable	282
9.4	Fonctions intégrables	282
9.4.1	Intégrale absolument convergente	282
9.4.2	Fonction intégrable	283
9.4.3	Inégalité triangulaire	283
9.4.4	Fonction continue, positive d'intégrale nulle	283
9.4.5	Le théorème de comparaison	283
9.4.6	Intégrales de Riemann	284
9.4.7	Translation	284
9.5	Intégration des relations de comparaison	285
9.5.1	Intégrales des restes	285
9.5.2	Intégrations partielles	286
9.6	Le théorème de convergence dominée	287
9.7	Intégration terme à terme	288
9.7.1	Cas des fonctions positives	288
9.7.2	Intégration terme à terme	289
9.8	Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre	290
9.8.1	Continuité	290
9.8.2	De classe \mathcal{C}^1	290
9.8.3	De classe \mathcal{C}^k	291
9.8.4	De classe \mathcal{C}^∞	291
9.8.5	Exercices	292
10	Variables aléatoires discrètes	301
10.1	Ensembles dénombrables	301
10.1.1	Ensemble dénombrable	301
10.1.2	Ensemble au plus dénombrable	302
10.1.3	Le support d'une famille sommable	305
10.2	Espaces probabilisés	307
10.2.1	Tribu sur un ensemble Ω	307
10.2.2	Événements	307
10.2.3	Espace probabilisable	308
10.2.4	Probabilité	308
10.2.5	Additivité finie	308
10.2.6	Continuité croissante	309
10.2.7	Continuité décroissante	310
10.2.8	Probabilité d'une union	310
10.2.9	Probabilité d'une intersection	311
10.2.10	Sous-additivité finie	311
10.2.11	Sous-additivité pour une réunion dénombrable	312
10.2.12	Événements négligeables et presque sûrs	312
10.2.13	Systèmes quasi complets d'événements	313
10.3	Probabilités conditionnelles et indépendance	314
10.3.1	Probabilité conditionnelle	314
10.3.2	Formule des probabilités composées	314
10.3.3	Formule des probabilités totales	315

10.3.4	Formule de Bayes	316
10.3.5	Indépendance	316
10.3.6	Indépendance et complémentaire	316
10.3.7	Famille d'événements indépendants	317
10.4	Espaces probabilisés discrets	317
10.4.1	Une distribution de probabilités discrètes	317
10.4.2	Le support	318
10.4.3	Probabilité associée à une distribution	318
10.5	Variables aléatoires discrètes	320
10.5.1	Définition	320
10.5.2	Événement	320
10.5.3	Variable aléatoire discrète réelle	320
10.5.4	La loi d'une variable aléatoire discrète	321
10.5.5	Distribution de probabilités discrètes	321
10.5.6	Lois équivalentes	322
10.5.7	Image d'une variable aléatoire par une fonction	323
10.5.8	Conservation de l'équivalence par l'image	323
10.5.9	Loi conditionnelle	324
10.5.10	Couple de variables aléatoires	324
10.5.11	Loi conjointe	325
10.5.12	Lois marginales	325
10.5.13	Extension aux n -uplets de variables aléatoires	326
10.6	Variables aléatoires indépendantes	326
10.6.1	Couple de variables aléatoires indépendantes	326
10.6.2	Indépendance et événements	326
10.6.3	Extension aux n -uplets de variables aléatoires	327
10.6.4	Famille de variables aléatoires indépendantes	327
10.6.5	Fonctions de variables aléatoires discrètes indépendantes	327
10.6.6	Lemme des coalitions	328
10.6.7	Existence d'un espace probabilisé	329
10.7	Lois usuelles	329
10.7.1	La loi géométrique	329
10.7.2	La loi de Poisson	330
10.7.3	Approximation d'une loi de Poisson	330
10.8	Espérance d'une variable aléatoire	331
10.8.1	Définition	331
10.8.2	Une égalité	331
10.8.3	Variable aléatoire complexe	332
10.8.4	Variable centrée	332
10.8.5	Familles sommables	332
10.8.6	Espérance d'une variable géométrique	334
10.8.7	Espérance d'une loi de Poisson	334
10.8.8	Formule de transfert	335
10.8.9	Linéarité de l'espérance	336
10.8.10	Positivité de l'espérance	337
10.8.11	Croissance de l'espérance	337
10.8.12	Inégalité triangulaire	337

10.8.13	Caractérisation des variables aléatoires positives d'espérance nulle	338
10.8.14	Majoration et espérance	338
10.8.15	Produit de variables aléatoires	339
10.9	Variance d'une variable aléatoire réelle	340
10.9.1	L'ensemble L^2	340
10.9.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz	340
10.9.3	La variance	342
10.9.4	Écart type	342
10.9.5	Variable réduite	342
10.9.6	Variance nulle	342
10.9.7	Formule de König-Huygens	343
10.9.8	Variable centrée réduite	343
10.9.9	Variance d'une variable géométrique	343
10.9.10	Variance d'une variable de Poisson	344
10.9.11	Covariance de deux variables L^2	345
10.9.12	Covariance de deux variables indépendantes	346
10.9.13	Variance d'une somme de n variables aléatoires	346
10.9.14	Variance d'une somme de n variables aléatoires décorrélées	346
10.10	Inégalités probabilistes	347
10.10.1	Inégalité de Markov	347
10.10.2	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	347
10.10.3	Loi faible des grands nombres	348
10.11	Fonctions génératrices	349
10.11.1	Définition	349
10.11.2	Le rayon de convergence de la fonction génératrice	349
10.11.3	Convergence normale sur le disque unité fermé	349
10.11.4	Continuité de la fonction génératrice	349
10.11.5	Détermination de la loi de X à partir de sa fonction génératrice	349
10.11.6	Lien avec l'espérance	350
10.11.7	Calcul de la variance	351
10.11.8	Fonctions génératrices des lois usuelles	352
10.11.9	Fonction génératrice d'une somme	354
10.12	Sujets de concours	355
11	Équations différentielles	393
11.1	Généralités	393
11.1.1	Équation différentielle linéaire	393
11.1.2	Équation différentielle homogène associée	394
11.1.3	Principe de superposition	394
11.1.4	Problème de Cauchy	394
11.1.5	Représentation d'une équation scalaire par un système différentiel	395
11.1.6	Problème de Cauchy pour une équation différentielle scalaire d'ordre n	396
11.2	Solutions d'une équation différentielle	396

11.2.1	Théorème de Cauchy linéaire	396
11.2.2	Le lemme de Gronwall	396
11.2.3	Unicité du problème de Cauchy	397
11.2.4	Existence d'une solution au problème de Cauchy	398
11.2.5	Théorème de Cauchy dans le cas matriciel	401
11.2.6	Équations différentielles scalaires d'ordre n	401
11.2.7	Équations homogènes	401
11.2.8	Dimension de l'espace des solutions	402
11.2.9	Équations scalaires homogènes d'ordre n	403
11.2.10	Équation avec second membre	403
11.2.11	Équations différentielles non normalisées	403
11.2.12	Utilisation des séries entières	404
11.3	Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice	405
11.3.1	Exponentielle d'un endomorphisme	405
11.3.2	Exponentielle d'une matrice	406
11.3.3	Exponentielle d'une matrice diagonale	406
11.3.4	Exponentielle de matrices semblables	407
11.3.5	Spectre de l'exponentielle	407
11.3.6	Continuité de l'application exponentielle	408
11.3.7	Dérivation de l'exponentielle	408
11.3.8	Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.	409
11.4	Systèmes différentiels à coefficients constants	410
11.4.1	Résolution du problème de Cauchy	410
11.4.2	Cas particulier où A est diagonalisable	410
11.5	Variation des constantes	412
11.5.1	Wronskien	412
11.5.2	Expression du wronskien	412
11.5.3	Caractérisation des bases de l'espace des solutions	413
11.5.4	Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2	413
12	Calcul différentiel et optimisation	415
12.1	Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	415
12.1.1	Dérivée selon un vecteur	415
12.1.2	Dérivées partielles	416
12.2	Différentielle	416
12.2.1	Application différentiable	416
12.2.2	Développement limité à l'ordre 1	416
12.2.3	Applications coordonnées	417
12.2.4	Continuité	418
12.2.5	Dérivée selon un vecteur	418
12.2.6	Unicité	419
12.2.7	Application différentiable	420
12.2.8	Application constante	420
12.2.9	Application linéaire	420

12.2.10	Dérivées partielles	420
12.2.11	La jacobienne	421
12.2.12	Cas des fonctions d'une variable réelle	421
12.2.13	Le gradient	422
12.3	Opérations sur les applications différentiables	424
12.3.1	Combinaison linéaire	424
12.3.2	Applications multilinéaires	424
12.3.3	Règle de la chaîne	426
12.3.4	Dérivée le long d'un arc	427
12.3.5	Dérivées partielles d'une composées d'applications différen- tiables	427
12.4	Applications de classe \mathcal{C}^1	429
12.4.1	Définition	429
12.4.2	Dérivées partielles et caractère \mathcal{C}^1	429
12.4.3	Opérations algébriques sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1	430
12.4.4	Intégration le long d'un arc	431
12.4.5	Caractérisation des fonctions constantes	431
12.5	Vecteurs tangents	432
12.5.1	Vecteur tangent	432
12.5.2	Sous-espace affine	432
12.5.3	Sphère d'un espace euclidien	433
12.5.4	Graphe d'une fonction numérique	434
12.5.5	Espace tangent et différentielles.	435
12.5.6	Les suites contractantes	435
12.5.7	Le théorème du point fixe	436
12.5.8	L'inverse est \mathcal{C}^∞	437
12.5.9	L'inégalité des accroissements finis	437
12.5.10	La norme de l'inverse	437
12.5.11	Le théorème d'inversion locale	438
12.5.12	Le théorème des fonctions implicites	441
12.5.13	Plan tangent	442
12.6	Optimisation, étude au premier ordre	443
12.6.1	Point critique d'une application différentiable	443
12.6.2	Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur	443
12.6.3	Extremum local et restriction	444
12.6.4	Optimisation sous contrainte	444
12.7	Applications de classe \mathcal{C}^k	446
12.7.1	Dérivées partielles d'ordre k	446
12.7.2	Applications de classe \mathcal{C}^k	446
12.7.3	Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k	448
12.7.4	Équations aux dérivées partielles	448
12.8	Optimisation au second ordre	449
12.8.1	La hessienne	449
12.8.2	La formule de Taylor-Young à l'ordre 2	449
12.8.3	Minimum local	452

12.8.4	Maximum local	452
12.8.5	Condition pour un minimum local.	453
12.8.6	Condition pour un maximum local	453
12.8.7	Cas particulier de \mathbb{R}^2	454