

Formation et pratiques pro

FINANCE D'ENTREPRISE

Frédéric Valognes



NOTIONS FONDAMENTALES DE FINANCE : DE L'USAGE DES MATHÉMATIQUES

Le concept

Les *mathématiques financières* sont un domaine des mathématiques appliquées qui étudie les modèles et les méthodes pour évaluer et gérer les aspects financiers tels les investissements, les emprunts, les taux d'intérêt, les risques et les rendements. Elles sont utilisées pour s'arrêter sur des décisions d'investissement à l'application de calculs et d'analyses quantitatives.

1.1. CAPITALISATION ET ACTUALISATION D'UN FLUX DE TRÉSORERIE

1.1.1. LE CONTEXTE D'APPLICATION

Dans le domaine des *techniques financières*, un élément fondamental est pris en compte dans la pluralité des résolutions: le constat qu'un flux de trésorerie à un instant donné – une somme d'argent attribuée ou placée – se doit d'être ajusté à un *taux d'intérêt* afin de le comparer ou de le combiner dans le temps en considération d'autres flux survenant à des périodes antérieures ou postérieures.

Il est question de transposer temporellement un ou plusieurs flux de trésorerie, dont l'objet est de *rémunérer le temps*: mais au juste, pour quelle raison? Il est possible de l'expliquer: nul n'accepterait renoncer à une consommation immédiate que s'il peut obtenir ou récupérer en contrepartie une somme ultérieure plus conséquente. Il doit ainsi exister un taux qui rémunère un engagement, car tout investisseur réputé *rationnel* se situerait dans un contexte de renoncer à une utilisation immédiate.

Les parties prenantes d'un projet d'emprunt ou d'investissement s'endettent ou placent de l'argent à un taux qui représente le *prix du temps*, à l'estimation d'un risque, mais aussi de la durée de la concession de ladite somme. À ce principe fondamental, il est possible d'affirmer que l'on ne peut comparer 1 euro d'aujourd'hui avec 1 euro de demain. Le temps et le risque ont un prix : ils sont illustrés par la *valeur temps de l'argent*. Il s'agira de transposer un ou plusieurs flux de trésorerie, de les convertir soit dans un temps passé, ou bien dans un temps plus lointain.

En permutant un flux de trésorerie d'un temps présent vers un temps futur, on accomplit une *capitalisation* de ce flux : il s'agit de projeter une valeur constatée aujourd'hui vers une valeur ultérieure.

Inversement, pour substituer un flux de trésorerie d'un temps futur vers un temps antérieur, on réalise une *actualisation* du flux : ainsi est rapportée une somme convenue dans le futur à une autre identifiée au temps présent.

1.1.2. LA CAPITALISATION D'UN FLUX DE TRÉSORERIE

On appelle un flux de trésorerie établi temporellement dans le présent une *valeur actualisée*, ou VA^1 ; contrairement, un flux constaté dans un temps plus avancé la *valeur future* ou VF .

À cet effet, tout flux considéré à la *valeur actualisée* (ou *valeur présente*) qui se doit d'être converti en *valeur future* applique la formule de *capitalisation*, en connaissance du *taux d'intérêt* :

$$VF_n = VA \times (1 + r)^n$$

où :

VF_n = valeur future d'un flux de trésorerie à « n » années

VA = valeur actualisée d'un flux de trésorerie

r = taux d'intérêt

n = nombre de périodes de composition

Note

Cette formule est communément utilisée en *finance d'entreprise*. Il implique que les intérêts obtenus de la somme placée (ou empruntée) ne soient utilisés par l'investisseur sur la période considérée.

Par cette méthode, les intérêts ainsi calculés sur le montant principal capitalisent d'eux-mêmes : une somme estimée minime en début de placement peut rapidement paraître appréciable, selon la durée d'engagement retenue, et l'élévation du taux d'intérêt.

1. L'appellation *valeur présente* ou VP est également communément utilisée.

EXEMPLE 1-1

Un investisseur place 1 000 € sur 10 ans à un taux annuel de 10 %, et cela sans retirer d'argent du compte durant cette période. Il voudrait estimer la somme dont il dispose à terme.

Solution :

On applique la formule : $1\,000 \times 1,1^{10} = 2\,593,74$. Au terme des 10 années, l'investisseur disposera de 2 593,74 €, à la condition de ne pas affecter le capital de départ.

1.1.3. L'ACTUALISATION D'UN FLUX DE TRÉSORERIE

L'objet est d'*actualiser* une somme future, ainsi de déterminer le flux de trésorerie que cette somme représenterait à une date passée. On convertit une *valeur future* en une valeur dite *actualisée*, considérant une durée de placement (ou d'emprunt) et un taux d'intérêt :

$$VA = \frac{VF_n}{(1+r)^n} \Leftrightarrow VA = VF_n \times (1+r)^{-n}$$

où :

VA = valeur actualisée d'un flux de trésorerie

VF_n = valeur future d'un flux de trésorerie à « n » années

r = taux d'intérêt

n = nombre de périodes de composition

Note

Le bénéfice de l'*actualisation* n'apparaît pas de prime abord avéré. On le traduit par la démarche : prévoirait-on le versement d'une somme S qui serait disponible dans n années exclusivement, et considérant une utilisation immédiate.

Une éventualité serait d'emprunter instantanément un montant à t_0 (à l'instant présent, le montant étant non connu cependant) auprès d'un organisme financier : appliquant un taux d'intérêt, et connaissant la somme à rembourser dans un nombre de n années,¹ on détermine le montant qu'il est possible d'emprunter à l'instant présent.

On procède ainsi à une *actualisation* du flux de trésorerie perçu dans le futur, résultant d'une somme établie à une date antérieure : le montant ainsi obtenu à t_0 est rapporté à une *valeur actualisée*.

1. La somme S sera en effet perçue à ce moment précis.

EXEMPLE 1-2

Un particulier est assuré de disposer d'une somme de 4 000 € dans 5 ans. Il a besoin d'argent au jour présent. Il donne la garantie au banquier de la somme attendue. Ce dernier lui propose de lui prêter une somme d'argent dans l'immédiat à un taux de 6 % annuels, et s'attend à être remboursé de 4 000 € d'ici 5 ans, tenant compte des intérêts cumulés. Le particulier voudrait estimer la somme dont il peut disposer aujourd'hui.

Solution :

Pour calculer la somme dont il peut disposer ce jour, on applique $4\,000/1,06^5 = 2\,989,03$. L'investisseur peut obtenir 2 989,03 €, selon les conditions définies.

1.1.4. LA COMBINATION DE PLUSIEURS FLUX DE TRÉSORERIE DANS LE TEMPS

Il est possible de combiner – c'est-à-dire additionner ou soustraire – des flux de trésorerie multiples, à l'unique condition qu'ils apparaissent à une base temporelle comparable. Il n'est pas en revanche rendu possible d'ajuster des flux de trésorerie à périodes différenciées, pour la raison qu'un taux d'intérêt se doit d'être appliqué. Pour ainsi arriver à ses fins, on procède à une *actualisation* et (ou) à une *capitalisation*, comme montré dans l'exemple suivant.

EXEMPLE 1-3

Un épargnant voudrait connaître la somme obtenue d'ici 4 années, considérant les flux de trésorerie versés en fin d'année, et appliquant un taux d'intérêt annuel de 4 %, comme présenté ainsi :

- 2 000 € versés après 1 an,
- 3 000 € versés après 2 ans,
- 4 000 € versés après 3 ans.

Solution :

On actualise ces trois sommes au temps présent, pour par la suite les transposer 4 ans après :

$$(2\,000/1,04 + 3\,000/1,04^2 + 4\,000/1,04^3) \times 1,04^4 = 9\,654,53.$$

Ainsi, cet épargnant disposera au terme des 4 années de la somme de 9 654,53 €.

Pour aller plus loin

L'actualisation de flux dits « perpétuels constants »

Est présenté un cas de figure régulièrement rencontré dans les calculs financiers : on pourrait avoir recours à une *actualisation* de flux de trésorerie constants pour une durée indéfinie – soit d'écarts temporels intermédiaires identiques – et ainsi dits *perpétuels constants*.

Ce concept de flux *perpétuels* peut paraître obscur pour qui aborde la *finance*, cependant, il existe des placements – certes peu nombreux dans la pratique – dont la somme initialement empruntée n'est en principe jamais remboursée.

La formule applicable d'*actualisation* d'un flux de trésorerie *perpétuel* est la suivante :

$$VA = \frac{F}{r}$$

où :

VA = valeur actualisée des flux de trésorerie cumulés

F = flux de trésorerie constant

r = taux d'intérêt

L'objet ici n'est cependant pas de s'intéresser à la démonstration mathématique pour obtenir la formule, mais de l'appliquer, quand bien même son utilisation est répandue dans la résolution de problèmes en *finance*, et notamment dans les chapitres à suivre.

EXEMPLE 1-4

Une entreprise reçoit une somme de 10 000 € chaque année (fin de période), pour une durée non définie. On détermine la valeur de ces flux cumulés perpétuels à ce jour, à connaissance du taux annuel d'*actualisation* à 2 %.

Solution :

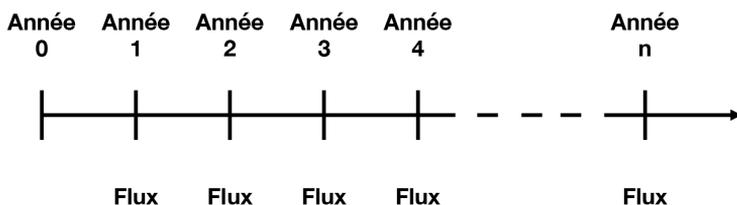
Le montant obtenu à la *valeur actualisée* se calcule ainsi : $10\,000/0,02 = 500\,000$.

Les flux annuels perpétuels de 10 000 € représentent à aujourd'hui 500 000 €.

1.2. LES ANNUITÉS CONSTANTES

Au précédent *exemple 1-3*, il a été présenté le calcul d'une *valeur actualisée* en considération de flux de trésorerie de montant inégaux, au contexte de leur distribution dans le temps.

À présent, dans une configuration autre, on fait état de flux de trésorerie survenant à périodes régulières, cependant dont le montant est identique, considérant que le premier flux est initié à la fin de la première année, et qu'un ultime flux est distribué à une année *terminale* nommée n .



Si pour des flux dits *perpétuels* (ainsi montrés dans le paragraphe précédent) les versements sont illimités, ceux concernant les *annuités constantes* cessent à un terme défini. Ainsi, au constat de flux de trésorerie réguliers et identiques, la démarche s'inscrit dans l'expression d'une *suite mathématique géométrique*,¹ dont l'usage facilite la composition d'un nombre conséquent de flux identiques, et arrivant à périodes régulières. Et cela à défaut d'actualiser chaque flux pris un-par-un, ce qui se révélerait être une opération considérable.

On calcule ainsi la *valeur actualisée* de ces flux de trésorerie donnés comme *constants*, ici appelés *annuités constantes* :

$$VA = \frac{F}{r} \times \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

où :

VA = valeur actualisée des flux de trésorerie cumulés

F = valeur de l'annuité constante

r = taux d'intérêt

n = nombre de périodes de composition

EXEMPLE 1-5

Une entreprise dégage des flux de trésorerie de 2 000 € chaque année durant 20 ans, placés successivement de la fin de la première année de placement, jusqu'à la fin de la dernière année. Le directeur financier voudrait connaître la *valeur actualisée* de ces flux successifs constants à aujourd'hui, considérant un taux annuel de 6 %.

Solution :

On pratique la formule présentée ci-dessus :

$VA = (2\,000/0,06) \times [1 - (1/1,06^{20})]$, on trouve le résultat de 22 939,84 €.

Cette formule certes étant adaptée pour procéder à l'*actualisation* (à l'instant présent) de mouvements de trésorerie répétés avec un terme défini, la démarche ne saurait être tant pertinente pour les non-familiers de calculs complexes : il apparaîtrait d'autant intuitif d'évaluer la *valeur future* de flux constants dans une

1. Ici n'est pas l'objet de démontrer l'expression de cette formule ; on pourra toujours consulter ses prises de notes de mathématiques de niveau lycée.

période future considérée. Ainsi, serait-il, dans le cadre de cette démarche, envisageable d'estimer une somme obtenue dans un terme lointain sur un placement de fonds en épargne-retraite, et singulièrement pour des versements répétés...

La formule de calcul de la *valeur future* de flux de trésorerie *constants* se présente sous deux formes équivalentes :

$$VF_n = \frac{F}{r} \times \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] \times (1+r)^n \Leftrightarrow VF_n = \frac{F}{r} \times \left[(1+r)^n - 1 \right]$$

où :

VF_n = valeur future des flux de trésorerie cumulés à « n » années

F = valeur de l'annuité constante

r = taux d'intérêt

n = nombre de périodes de composition

Note

Ainsi, la première expression de la formule donne une *valeur future* par la multiplication de la *valeur actualisée* d'une suite d'*annuités constantes* (concept détaillé plus haut) par le facteur de capitalisation à l'exposant *n* ; la seconde présente une formulation alternative, cependant équivalente. La première formule semblerait plus intuitive : chacun aura sa préférence...

EXEMPLE 1-6

Un épargnant verse sur un compte rémunéré un montant à chaque fois identique de 1 000 € sur une périodicité régulière d'une année, durant 5 ans, à partir de la fin de la première année, à un taux de 3 % l'an.

Déterminer quelle est la somme de ces flux de trésorerie au terme des 5 années en tenant compte du taux d'intérêt donné.

Solution :

On calcule la *valeur actualisée* de ces flux d'annuités constantes par la première expression de la formule développée précédemment :

$VA = (1\,000/0,03) \times [1 - 1/(1 + 0,03)^5]$, donnant comme résultat 4 579,71 €, ensuite on capitalise ce résultat 5 années au-delà, au taux donné de 3 % :

$VF_5 = 4\,579,71 \times (1 + 0,03)^5 = 5\,309,12$ €.

Pour aller plus loin

Déterminer l'inconnue du taux « r »

Répondant à une demande particulière, on pourrait demander de déterminer l'inconnue r . Ainsi seraient portées à connaissance l'ensemble des données de l'équation, hormis le taux d'intérêt qui actualise les flux. Or, il est impossible d'isoler cette partie de l'équation, qui apparaît à deux places distinctes, et dont les membres sont séparés d'un signe de soustraction dans la factorisation.

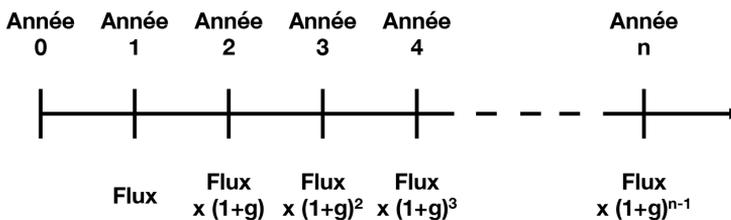
On peut en revanche trouver la valeur r par la méthode de l'*interpolation linéaire* à la résolution d'une équation obtenue du *théorème de Thalès* (enseignée en classes de collège).

Une calculatrice de type *financière*, ou un logiciel *tableur*, peuvent aussi résoudre le calcul.

1.3. LES ANNUITÉS CROISSANTES

La formule développée dans le précédent paragraphe est utilisée dans le contexte d'addition de flux de trésorerie identiques à intervalles réguliers. En reprenant ces développements, on considère ici que les montants investis à périodes régulières dans un plan d'épargne ne seraient pas identiques, mais de configuration d'augmentation des versements.

On place ainsi des sommes sur un compte rémunéré à un taux donné, sur une durée significative, pour constituer un capital retraite. Au constat de risques d'inflation sur cette période, ou encore, au motif de répliquer l'augmentation régulière de ses revenus, la démarche serait d'accroître graduellement le montant des versements annuels.



Est présentée ci-dessous une formule qui calcule la *valeur actualisée* du versement des flux de trésorerie, appliquant un taux de progression g constant répliqué d'une année à l'autre, cependant conservant un taux de rémunération r resté inchangé :

$$VA = \frac{F}{r-g} \times \left[1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^n \right]$$