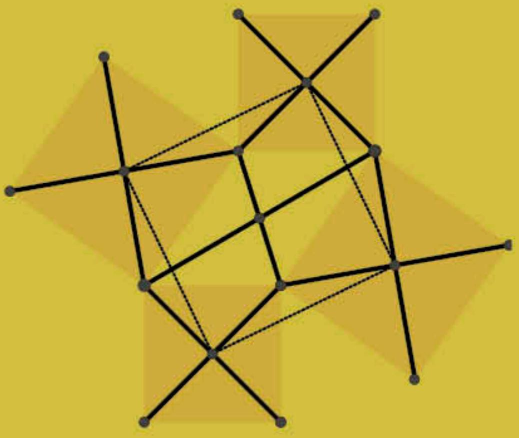
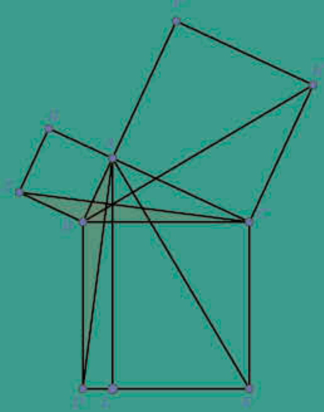
SECONDE



LES MATHS EN PROFONDEUR

Fabien Besnard

- Cours développé
- Démonstrations
- Questions d'élèves
- Exercices corrigés



ellipses

Chapitre 1

Logique

1.1 Introduction

Lorsqu'on fait un calcul, on fait des mathématiques. On fait également des mathématiques quand on fait de la géométrie. Pourtant, ces deux activités semblent assez éloignées. Qu'ont-elles en commun ? Dans les deux cas, on a un point de départ (les données du calcul, les hypothèses en géométrie) et un point d'arrivée (le calcul à effectuer, la conclusion à démontrer). Pour aller de l'un à l'autre on utilise des règles (de calculs, de raisonnement) qui sont données au départ. C'est cette démarche – passer des données à la conclusion en utilisant des règles connues – qui caractérise le mieux l'activité mathématique, qu'elle soit celle d'un lycéen ou d'un mathématicien.


Les mathématiciens peuvent-ils inventer de nouvelles règles ?

Oui, c'est permis à condition que cela n'entraîne aucune contradiction. On assiste alors à la naissance d'une nouvelle théorie. On peut citer l'exemple des géométries non-euclidiennes qui sont apparues au XIX^{e} siècle, dans lesquelles il peut exister une infinité de parallèles à une droite donnée passant par un point donné. Mais c'est un phénomène assez rare : modifier les règles conduit le plus souvent à des contradictions ou des impasses. C'est en tout cas quelque chose que vous n'aurez jamais à faire pendant vos études !


Utiliser des règles connues est ennuyeux, cela ne sollicite pas l'imagination !

Bien au contraire ! Il existe de multiples façons de combiner ces règles, et vous aurez parfois besoin de toute votre créativité pour trouver celle qui vous sera utile.


Quelles sont ces fameuses règles ?

Chaque domaine des mathématiques a les siennes, que nous verrons le moment venu. Dans ce chapitre nous allons exposer celles qui sont communes à toutes les théories mathématiques : les règles de la logique.

Ce chapitre est un peu difficile au premier abord. Il est impératif de traiter tous les exercices du cours et la majorité des exercices supplémentaires !

1.2 Les assertions

La logique est l'art de manipuler et de combiner entre elles des *assertions*, c'est-à-dire des phrases affirmant quelque chose. Une assertion doit posséder une (et une seule) *valeur de vérité*, c'est-à-dire être vraie ou fausse.

D'accord, donc « 2+2=4 » est une assertion, « 2+2=5 » aussi, mais « 2+2 » n'en est pas une, car elle n'affirme rien, et à ce titre n'est ni vraie ni fausse.

Que dire de l'affirmation suivante : « cette phrase est fausse » ?

C'est une version du célèbre paradoxe du menteur : elle ne peut pas être vraie (car alors elle serait fausse), ni être fausse (car alors elle serait vraie). Ceci illustre le fait que toutes les phrases grammaticalement correctes n'ont pas nécessairement une valeur de vérité bien définie. Il en va de même pour les phrases dont la valeur de vérité dépend d'un contexte que l'on ignore : « j'aime le chocolat » (qui dépend de qui l'énonce), « il est cinq heures » (qui dépend de l'heure qu'il est), etc. Nous nous débarrassons de toutes ces difficultés en précisant qu'une assertion *doit* posséder une valeur de vérité unique et bien définie.

On doit donc savoir si une phrase est vraie ou fausse pour décider s'il s'agit d'une assertion ?

Non, ça n'est pas nécessaire ! Par exemple « 10413 est divisible par 39 » est une assertion, car même si sa valeur de vérité ne saute pas aux yeux, il est certain qu'elle en possède une.

1.3 Les connecteurs logiques

Les *connecteurs logiques* servent à créer de nouvelles assertions à partir d'autres, de même que les conjonctions de coordination en français.

Le connecteur ET

Il a exactement le même sens qu'en français. Soient A et B deux assertions, alors l'assertion « A et B » sera vraie uniquement dans le cas où A et B sont vraies toutes les deux. On peut résumer ceci dans la table 1.1, appelée *table de vérité*.

Le connecteur ET se note parfois $\wedge$. Je me servirai le moins possible de cette dernière notation, car elle peut entraîner des confusions.

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table 1.1 – Table de vérité du connecteur ET.

Le connecteur OU

Le OU mathématique répond à la table de vérité 1.2. En résumé, l'assertion « A ou B » est fausse uniquement dans le cas où A et B sont toutes les deux fausses.

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table 1.2 – Table de vérité du connecteur OU.

Le OU mathématique n'a pas le même sens que le « ou » du français !

En effet, quand on dit de quelqu'un qui vient de réussir un strike au bowling « il est très adroit ou il a beaucoup de chance », on sous-entend que c'est soit l'un, soit l'autre. En mathématique, quand on dit « si $xy = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$ », on n'exclue pas la possibilité que x et y soient tous les deux nuls.

On dit que le OU mathématique est inclusif, tandis que le « ou » français est exclusif !

Exemple 1.3.1 Si $ABCD$ est un trapèze alors $(AB) \parallel (CD)$ ou $(AD) \parallel (BC)$. Notez qu'on peut avoir les deux : dans ce cas le trapèze est un parallèlogramme. Ce n'est pas contradictoire car un parallélogramme est un trapèze particulier.

Exercice 1.3.1 Soit n un nombre entier naturel. L'assertion « $n > 4$ ou n est pair » est-elle vraie si $n = 2$? Donner toutes les valeurs de n pour lesquelles cette assertion est fausse.

Y a-t-il un connecteur logique qui correspond au OU exclusif ?

Oui, on le note XOR (prononcé « ex-OR », pour « exclusive OR »). On l'utilise en électronique et en informatique.

Exercice 1.3.2 Quelle est la table de vérité de XOR ?

Le connecteur OU se note parfois $\vee$. Comme pour $\wedge$, je ne me servirai que rarement de cette notation.

L'implication

Le symbole $\Rightarrow$ se lit « implique ». L'assertion $A \Rightarrow B$ signifie que *si A est vrai, alors B est vrai.*

Exemple 1.3.2 L'implication suivante : « $x > 4 \Rightarrow x > 3$ » est vraie. En effet, à chaque fois que « $x > 4$ » est vraie, « $x > 3$ » est nécessairement vraie.

Exemple 1.3.3 Le théorème de Pythagore peut s'énoncer ainsi :

$$\text{« } MNP \text{ rectangle en } M \Rightarrow NP^2 = MN^2 + MP^2 \text{ »}$$

L'exemple 1.3.3 est l'occasion de signaler quelque chose d'important : lorsqu'on écrit une assertion sans préciser si elle est vraie ou fausse, on sous-entend qu'elle est vraie. Sinon le théorème de Pythagore devrait s'écrire

$$\text{« } MNP \text{ rectangle en } M \Rightarrow NP^2 = MN^2 + MP^2 \text{ » est vrai,}$$

ce qui serait très lourd !
Reprenons l'exemple 1.3.2. En français on pourrait dire « pour que x soit strictement plus grand que 3, il suffit qu'il soit strictement plus grand que 4 ». Mais on peut dire aussi « pour que x soit strictement plus grand que 4, il est nécessaire qu'il soit strictement plus grand que 3 ».

On a donc 3 façons équivalentes de traduire l'assertion « $A \Rightarrow B$ » en français :
- Si A alors B,
- A est une condition suffisante pour B,
- B est une condition nécessaire pour A.

Exemple 1.3.4 Les assertions suivantes signifient la même chose :
- $ABCD$ carré $\Rightarrow$ $ABCD$ rectangle,
- pour que $ABCD$ soit un rectangle, il suffit que $ABCD$ soit un carré,
- pour que $ABCD$ soit un carré, il est nécessaire que $ABCD$ soit un rectangle.

Lorsqu'on dispose d'une assertion du type $A \Rightarrow B$, on peut parler de l'implication *réciproque* $B \Rightarrow A$. Si une implication est vraie, sa réciproque ne l'est pas toujours, comme le montre clairement l'exemple 1.3.4. Autrement dit, pour qu'un quadrilatère soit un rectangle il suffit que ce soit un carré, mais cela n'est pas nécessaire. De même, pour qu'un quadrilatère soit un carré, il est nécessaire que ce soit un rectangle, mais cela n'est pas suffisant.
La table de vérité de l'implication est la table 1.3. On peut résumer les deux dernières lignes par le slogan : « le faux implique n'importe quoi ».

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TABLE 1.3 – Table de vérité du connecteur $\Rightarrow$.

La troisième ligne me semble vraiment bizarre. Ne peut-on pas la modifier ? Après tout, les logiciens se sont peut-être trompés...

Non, on ne le peut pas. Voici un exemple qui le montre. Il est clair que l'implication suivante est vraie pour tous réels x,y et z :

$$x = y \Rightarrow zx = zy \tag{1.1}$$

Oui, c'est vrai qu'on peut multiplier une équation de chaque côté par un même nombre.

Bien. Prenons le cas où $x = 1$, $y = 2$ et $z = 0$. Alors l'égalité $x = y$ qui joue le rôle de l'assertion A dans la table de vérité est fausse, tandis que l'égalité $zx = zy$, qui joue le rôle de l'assertion B est vraie (puisque $0 = 0$). Comme vous étiez d'accord pour dire que l'implication (1.1) est toujours vraie, il en découle que si A est fausse et B est vraie, alors $A \Rightarrow B$ est vraie.

C'est parce que je n'avais pas pensé à cette possibilité...

Justement ! Le fait que $A \Rightarrow B$ soit toujours vraie quand A est fausse permet de se désintéresser complètement du cas où A est fausse. Ainsi, pour montrer que cette implication est vraie, il suffit de considérer le cas où A est vraie.
La table de vérité de l'implication peut donc se résumer ainsi : le seul cas où $A \Rightarrow B$ est fausse, c'est lorsque A est vraie et B fausse.
Si vous pensez que tout ceci est évident, répondez le plus rapidement possible à l'exercice suivant et ne regardez pas le corrigé :

Exercice 1.3.3 On considère quatre cartes sur lesquelles sont inscrites des lettres au recto et des nombres au verso. Les faces visibles sont : A-B-8-7. On voudrait savoir si la règle suivante est vérifiée : « à chaque fois qu'il y a un 7 sur une face, il y a un A sur l'autre ». Il suffit de retourner deux cartes pour savoir si cette règle est satisfaite. Lesquelles ?

Je connais cet exercice : c'est la « tâche de sélection de Wason ». On l'utilise pour montrer que raisonner dans l'abstrait est difficile pour l'être humain...

En effet, 80 % des personnes interrogées se trompent en retournant la carte A ! Si c'est votre cas, ne vous inquiétez pas : refaites l'exercice en réfléchissant au lien avec la table de vérité de l'implication...
Une autre leçon importante que l'on peut tirer de cette table de vérité est le rôle du *contre-exemple* pour démontrer la fausseté d'une implication. Supposons qu'on soit face à l'implication suivante :

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \tag{1.2}$$

Pour montrer que l'implication (1.2) est fausse, il suffit de considérer le cas où $x = -1$. Dans ce cas l'assertion de gauche est vraie, mais celle de droite est fausse.

Exercice 1.3.4 Les implications suivantes, où x un est nombre réel quelconque, sont-elles toujours vraies ?

1. $2x + 3 = 7 \Rightarrow x = 2$
2. $2x + 4 = 2(x + 2) \Rightarrow x = 2$
3. $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
4. $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ et $x = -2$
5. $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$
6. $2x = 2 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 21{,}3$

L'équivalence

L'assertion « $A \Leftrightarrow B$ » est par définition une abréviation de « $(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$ ». Autrement dit $A \Leftrightarrow B$ est vraie ssi $A \Rightarrow B$ et sa réciproque sont vraies. On peut donc déterminer la table de vérité de l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ à partir de celles de $A \Rightarrow B$ et de $B \Rightarrow A$. Le résultat est la table 1.4.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

TABLE 1.4 – Table de vérité du connecteur $\Leftrightarrow$.

On voit donc que $A \Leftrightarrow B$ est vraie si, et seulement si, A et B ont la même valeur de vérité. On parle alors de condition « nécessaire et suffisante ».

Exemple 1.3.5 Comme on sait que la réciproque du théorème de Pythagore est vraie, on peut écrire MNP rectangle en $M \Leftrightarrow NP^2 = MN^2 + MP^2$.

Pour montrer qu'une équivalence est vraie, la méthode la plus courante est de montrer que $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont toutes les deux vraies.

Exercice 1.3.5 Quelles implications peut-on écrire entre les affirmations A, B, C, D, E ci-dessous ? Quelles équivalences ? Entraînez-vous à les exprimer à l'aide des termes « nécessaire » et « suffisant ».
A : $MNPQ$ est un carré
B : $MNPQ$ a quatre angles droits
C : $MN = NP = PQ = QM$
D : $MNPQ$ est un rectangle
E : $MNPQ$ est un losange

Les équivalences sont très importantes pour résoudre les équations et les inéquations. Une équation d'inconnue x est une assertion du type « G=D », où G est le *membre de gauche* et D le *membre de droite*. Ce sont des expressions comportant des nombres, des opérations, et la lettre x qui représente un nombre. Une solution est une valeur de x qui rend l'assertion « G=D » vraie lorsqu'on remplace x par cette valeur. Dans ce cas, on dit aussi que « x vérifie l'équation ». Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Exemple 1.3.6 L'assertion « $2x + 4 = 10$ » est une équation. Le nombre 3 est une solution car lorsqu'on remplace x par 3 on obtient $2 \times 3 + 4 = 10$ qui est une assertion vraie. On dit aussi que 3 vérifie l'équation.

Pour résoudre une équation on dispose de deux méthodes.

<u>Première méthode</u> : On écrit une suite d'équivalences. Chacune doit être vraie, il faut donc bien vérifier que l'on peut « descendre » et « remonter » à chaque étape. Par exemple :

$$\begin{array}{ll} & 2x + 4 = 4x - 2 \\ \Leftrightarrow & 2x + 4 + 2 = 4x \\ \Leftrightarrow & 6 = 4x - 2x \\ \Leftrightarrow & 6 = 2x \\ \Leftrightarrow & 3 = x \end{array}$$

On peut vérifier que toutes les équivalences ci-dessus sont vraies. Par exemple la première ligne implique la deuxième, car on sait qu'on peut ajouter 2 à chaque membre d'une équation. Mais de la deuxième on peut aussi remonter à la première, car on peut soustraire 2 à chaque membre d'une équation.

Exercice 1.3.6 Vérifier toutes les étapes de la résolution précédente.

La conclusion est que l'équation de départ a une solution et une seule, qui est 3. En effet, la première ligne est équivalente à la dernière. On peut le dire en français : pour que $2x + 4$ soit égal à $4x - 2$, il est nécessaire et suffisant que x soit égal à 3.

<u>Deuxième méthode</u> : On raisonne par conditions nécessaires et vérification. C'est-à-dire qu'on écrit une suite d'implications dont chacune doit être vraie. Puis on arrive à une ou plusieurs valeurs qui sont les seules *possibles* pour x. Ensuite *on doit vérifier* si ces valeurs sont solutions.
Cette méthode comporte donc une étape de plus, la vérification, mais il est plus simple de justifier une implication qu'une équivalence. C'est aussi parfois la seule façon de procéder.

Exemple 1.3.7

$$
\begin{array}{ll}
 & \sqrt{x^2+1} = x+1 \\
\Rightarrow & \sqrt{x^2+1}^{\,2} = (x+1)^2, \text{ car les carrés de nombres égaux sont égaux} \\
\Rightarrow & x^2+1 = (x+1)^2, \text{ par définition de la racine carrée} \\
\Rightarrow & x^2+1 = x^2+2x+1, \text{ par identité remarquable} \\
\Rightarrow & x = 0
\end{array}
$$

Vérification : $\sqrt{0^2+1} = 0+1$ est bien vrai. Donc il y a une unique solution qui est $x = 0$.

On n'aurait pas pu procéder par équivalences ?

Non, car on ne peut pas revenir en arrière à la première étape. En effet, ce n'est pas parce que les carrés de deux nombres sont égaux que les nombres de départ sont égaux : ils pourraient être opposés !

Exercice 1.3.7 Corrigez l'erreur dans le raisonnement suivant, et résolvez l'équation par conditions nécessaires et vérification.

« On résout l'équation suivante par équivalences :

$$
\begin{array}{ll}
 & \sqrt{2x+3} = \sqrt{x+1} \\
\Leftrightarrow & 2x+3 = x+1 \\
\Leftrightarrow & x = -2
\end{array}
$$

Il y a donc une unique solution qui est -2. »

On peut tout-de-même résoudre l'équation de l'exercice 1.3.7 par équivalence en ajoutant à chaque ligne « et $x \geq -1$ », car c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la première ligne soit définie. On obtient alors $(\sqrt{2x+3} = \sqrt{x+1}$ et $x \geq -1) \Leftrightarrow (x = -2$ et $x \geq -1)$. Comme l'assertion de droite est fausse quel que soit x, on en déduit que l'assertion de gauche est fausse quel que soit x, et qu'il n'y a donc pas de solution à cette équation.

C'est un peu lourd comme méthode, je préfère procéder par implications !

La négation

On note « non-A », ou « $\neg A$ », la négation de A, c'est-à-dire l'assertion *contraire* de A. L'assertion non-A est vraie si A est fausse, et non-A est fausse si A est vraie.

Exercice 1.3.8 Écrivez la table de vérité de $\neg A$.

Le mot « contraire » en logique n'a pas le sens chargé de symbolisme qu'on lui prête parfois en français ! Par exemple, le contraire de « cette chemise est noire » n'est pas « cette chemise est blanche », mais « cette chemise n'est pas noire » !