

Adrien Schneider

Probabilités

MP
MP*

Les 62 exercices incontournables
pour intégrer



ellipses

Table des matières

1	L'essentiel du cours	9
1	Dénombrement	9
1.1	Ensembles finis et cardinal	9
1.2	Propriétés sur les ensembles finis	9
1.3	Cardinal d'une réunion, d'une différence et d'un produit cartésien	10
1.4	Principe des tiroirs	10
1.5	Uplets et arrangements	11
1.6	Applications entre deux ensembles	11
1.7	Combinaisons	12
1.8	Anagrammes	13
1.9	Stars and Bars	13
2	Tribu	15
2.1	Propriétés sur les tribus	15
3	Espace probabilisable	15
3.1	Probabilité sur un espace probabilisable	15
3.2	Propriétés élémentaires d'une probabilité	16
3.3	Théorème de continuité croissante/décroissante	16
3.4	Événements négligeables et presque sûrs	16
3.5	Probabilités conditionnelles	17
3.6	Formule des probabilités composées	17
3.7	Famille complète d'événements et formule des probabili- tés totales	17
3.8	Formule de Bayes	17
3.9	Indépendance d'événements	18
4	Variables aléatoires	19
4.1	Un exemple très important de variable aléatoire : la va- riable aléatoire indicatrice d'un événement	19

4.2	Variables aléatoires indépendantes	20
4.3	Couple et fonction de VAD	20
4.4	Lemme des coalitions	21
4.5	Espérance des VAD réelles ou complexes	22
4.6	Moments d'une variable aléatoire	24
4.7	Variables aléatoires ayant un moment d'ordre 2 : variance et écart-type	24
4.8	Variable aléatoire centrée réduite	25
4.9	Covariance de deux variables aléatoires	25
4.10	Corrélation de deux variables aléatoires	26
4.11	Fonctions génératrices	26
4.12	Trois inégalités primordiales	27
4.13	La loi faible des grands nombres	29
4.14	Lois usuelles	29
2	Exercices	33
1	Le problème du chevalier de Méré	33
2	Sur la fiabilité des tests	34
3	Un exemple de Tversky et Kahneman	35
4	Les allumettes de Banach	36
5	$ \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq 1/4$	37
6	Espérance et variance du nombre de points fixes d'une permuta- tion de $\llbracket 1; n \rrbracket$	37
7	Urne de Polya	38
8	On ne peut pas truquer deux dés de manière à ce que leur somme suive la loi uniforme sur $\llbracket 2; 12 \rrbracket$	40
9	Un motif doit presque sûrement apparaître : paradoxe du singe savant	42
10	Vers l'inégalité de Jensen	42
11	Si X et Y sont deux variable aléatoires indépendantes de même loi à valeurs strictement positives : $\mathbb{E}(X/Y) \geq 1$	43
12	Le problème du collectionneur de vignettes	44
13	Étude de l'écartement de deux variables indépendantes de même loi	46
14	Une propriété sur les lois de Poisson	49
15	Formule de Wald	50
16	Inégalité de Hölder pour l'espérance	52
17	La formule du crible	55

18	Autour de l'indicatrice d'Euler	57
19	Sur les dérangements	59
20	Sur les surjections	60
21	Inégalité de Popoviciu	61
22	Une variable aléatoire divisible à valeurs dans un intervalle est presque sûrement constante	62
23	Des résultats basiques sur les variables réelles positives divisibles	62
24	Sur les lois de Poisson	64
25	Matrices et loi de Bernoulli	66
26	Sur les matrices de Hadamard	68
27	Minorer la probabilité qu'une matrice soit inversible	70
28	Une égalité sur la probabilité d'inversibilité de matrices	71
29	Distance en variation totale	73
30	Une caractéristique de la convergence en probabilité pour les variables entières	76
31	Une propriété de la distance	77
32	Convergence d'une suite de lois binomiales vers une loi de Poisson	79
33	Marche aléatoire sur \mathbb{Z}	81
34	Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^2	84
35	Le problème du scrutin	86
36	Probabilité que deux polynômes unitaires de degré $n \in \mathbb{N}^*$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ avec p premier soient premiers entre eux	88
37	Autour de la somme de variables de Rademacher	89
38	Écriture binaire	92
39	Loi ζ_s	93
40	Convergence uniforme de variables réelles discrètes	95
41	Apparition de deux Face consécutifs	96
42	Comparaison de la vitesse d'apparition des motifs Pile-Face et Pile-Pile	97
43	Étude statistique des permutations	100
44	Calcul de l'espérance de l'inverse d'une variable aléatoire	102
45	Lemme de Borel-Cantelli	103
46	Loi du zéro-un de Borel	105
47	Une application de la loi du zéro-un de Borel : il n'existe pas de probabilité telle que $\forall a \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a}$ sur \mathbb{N}^*	106
48	Une propriété sur les moments d'une variable aléatoire à valeurs réelles	107
49	Caractérisation d'une variable aléatoire par ses moments	108

50	Maximum de variables uniformes	110
51	Longueur d'une suite sans répétition	112
52	Minimum et maximum de deux variables géométriques	115
53	Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète	116
54	Une amélioration de l'inégalité de Bienaymé- Tchebychev : l'inégalité de Hoeffding	118
55	Encadrement de l'espérance des variables aléatoires positives	121
56	Inégalité de Cantelli	123
57	Inégalité de Kantorovitch	124
58	Autour des nombres de Ramsey	126
59	Valeurs propres et probabilité	129
60	Inégalité de Kolmogorov	132
61	Variables aléatoires sous-gaussiennes	135
62	Processus de Poisson	138