Adrien Schneider

Probabilités

MP
MP*

Les 62 exercices incontournables
pour intégrer

ellipses

Chapitre 1

L'essentiel du cours

Cette partie a pour but de rappeler les résultats essentiels de probabilité au programme des deux années de classe prépa. Elle n'a pas vocation à remplacer les cours donnés par les professeurs qui sont les fondements nécessaires à la réussite des étudiants.
Cette partie permet de rappeler les résultats importants de ce cours mais ne s'étendra pas à refaire les démonstrations qui ont déjà été vues en cours.

1 Dénombrement

1.1 Ensembles finis et cardinal

On dit qu'un ensemble E est fini s'il est non vide et qu'il existe un entier naturel non nul n tel qu'on puisse réaliser une bijection de E dans $[\![1;n]\!]$.
Alors l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est unique et est appelé le cardinal de E (noté $Card(E)$ ou $|E|$).

NB : La notion de cardinal s'étend pour l'ensemble vide avec la convention $Card(\emptyset) = 0$.

1.2 Propriétés sur les ensembles finis

Soient E et F sont deux ensembles finis :
– s'il existe une bijection de E dans F alors les cardinaux de E et F sont égaux.

– s'il existe une injection de E dans F alors $Card(E) \leq Card(F)$.
– s'il existe une surjection de E dans F alors $Card(E) \geq Card(F)$.

NB 1 : en particulier, si A est une partie de E alors A est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal au cardinal de E.

NB 2 : si E et F ont le même cardinal et que f est une application de E dans F alors f est bijective si et seulement si f est injective si et seulement si f est surjective.

1.3 Cardinal d'une réunion, d'une différence et d'un produit cartésien

Soient A et B deux ensembles finis :
– $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$
En particulier si A et B sont disjoints : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.
Ce dernier résultat s'étend au cas de n ensembles finis disjoints deux à deux, en effet dans ce cas, en notant $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ ces ensembles, on a :
$Card(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} Card(A_i)$

NB : un cas particulier de ce dernier résultat est appelé le lemme des bergers. Il affirme que l'union de n ensembles finis disjoints de même cardinal p est un ensemble fini de cardinal np.

– $Card(A \setminus B) = Card(A) - Card(A \cap B)$
– Soient $E_1, ..., E_n$ n ensemble finis :
$Card(E_1 \times ... \times E_n) = Card(E_1) \times ... \times Card(E_n)$
En particulier si E est un ensemble fini : $Card(E^p) = Card(E)^p$

1.4 Principe des tiroirs

Soient E et F deux ensembles finis tels que $Card(E) \geq Card(F)$. Alors, si f est une application de E dans F : il existe $y \in F$ tel que Y admet au moins deux antécédents par f.

NB : en effet quand on range $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, alors un tiroir contient au moins deux chaussettes.

1.5 Uplets et arrangements

Soient E un ensemble fini et p un entier naturel non nul.
On appelle p-uplet de E une famille de p éléments de E, c'est-à-dire un élément de E^p. Notons que l'ordre des éléments d'un p-uplet est important (ce qui n'est pas le cas des combinaisons que nous verrons par la suite). De ce fait, le 2-uplet $(1,2)$ de $[\![1;2]\!]$ est différent du 2-uplet $(2,1)$.

NB 1 : de la partie sur le cardinal d'un produit cartésien on déduit qu'il y a $Card(E)^p$ différents p-uplets de E.

NB2 : les p-uplets permettent de modéliser p tirages indépendants successifs **avec** remise.

On appelle p-arrangement de E tout p-uplet de E composé d'éléments distincts.
Ainsi, en posant $n = Card(E)$, le nombre de p-arrangements de E est égal à $n(n-1)...(n-p) = \frac{n!}{(n-p)!}$

NB : les p-arrangements permettent de modéliser p tirages indépendants successifs **sans** remise.

1.6 Applications entre deux ensembles

– Soient E et F deux ensembles finis. L'ensemble des applications de E dans F, noté $\mathcal{F}(E,F)$ est de cardinal fini : $Card(F)^{Card(E)}$.
NB : notons en effet qu'un p-uplet d'un ensemble fini A est équivalent à une application de $[\![1;p]\!]$ dans A.

– De même si E et F sont deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n avec $p \leq n$ alors l'ensemble des applications injectives de E dans F est fini de cardinal $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Permutations

Soit E un ensemble fini. On appelle permutation de E toute bijection de E dans lui-même.

On appelle groupe symétrique de E l'ensemble des permutations de E. En notant n le cardinal de E, le groupe symétrique est un ensemble fini de cardinal $n!$

NB : le cardinal du groupe symétrique est notamment utilisé pour résoudre des problèmes pour lesquels une variable aléatoire suit la loi uniforme sur cet ensemble. C'est notamment le cas de l'exercice 6 : « Espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation de $[\![1; n]\!]$ ».

1.7 Combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit k un entier non nul inférieur ou égal à n. On appelle p-combinaison de E toute partie de E de cardinal k.
Le nombre de p-combinaisons de l'ensemble E est égal au coefficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

NB 1 : une combinaison est donnée sans ordre : elle n'a pas de premier élément. De plus le même élément de E ne peut pas figurer deux fois dans une même combinaison de E.

NB 2 : les p-combinaisons permettent de modéliser p tirages **simultanés**.

Formules sur les coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:
– Formule de symétrie : $\forall k \in [\![0; n]\!] : \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

– Formule de Pascal : $\forall k \in [\![1; n]\!] : \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

– Formule du capitaine : $\forall k \in [\![1; n]\!] : \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

– Somme des coefficients binomiaux : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

– Formule de Vandermonde : $\forall (m, p) \in \mathbb{N}^2 : \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$

NB 1 : de la formule de la somme des coefficients binomiaux on déduit que si E est un ensemble fini de cardinal n alors l'ensemble des parties de E noté $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini de cardinal 2^n. (En effet, en faisant une union disjointe des parties de E en fonction de leurs cardinaux on retrouve ce résultat à l'aide de la formule pour la somme des coefficients binomiaux).

NB 2 : un cas particulier utile de la formule de Vandermonde est celui où $n = m = p$. Alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

1.8 Anagrammes

On appelle anagramme d'un mot tout autre mot obtenu en plaçant les lettres de ce mot d'origine dans un ordre quelconque.
Pour un mot de n lettres contenant n_1 fois une première lettre et n_2 fois une deuxième ... et n_p fois une autre, le nombre d'anagrammes de ce mot est égal à $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_p!}$.

NB : dans le cas où toutes les lettres du mot d'origine sont distinctes, construire une anagramme de ce mot revient à permuter l'ordre des lettres de ce mot. Ainsi il y a autant d'anagrammes d'un mot de n lettres distinctes que de permutations de $[1; n]$, c'est-à-dire $n!$.

1.9 Stars and Bars

La formulation Stars and Bars permet de résoudre de nombreux problèmes complexes de dénombrement.
– Cas 1 : le nombre de manières de placer n objets identiques dans k ensembles distincts de manières à ce que chaque ensemble contienne **au moins un objet** est égal à $\binom{n-1}{k-1}$.
Pour comprendre ce résultat, on considère que les objets sont des étoiles (Stars) et qu'on veut les séparer par des barres (qui délimitent les ensembles). Comme les ensembles doivent contenir au moins un élément on ne peut pas trouver deux barres à la suite ni une barre en premier élément de la séquence. Il y a ainsi $n - 1$ places pour placer les barres et on en place $k - 1$ (en effet pour former k ensembles il nous suffit de $k - 1$ barres). D'où le résultat.

Afin de mieux comprendre le principe voici un exemple avec $n = 6$ et $k = 3$. On alignera donc 6 étoiles et on utilisera deux barres pour les séparer en 3 groupes.

$\star\star\star \mid \star \mid \star\star$

Dans cet exemple, le premier ensemble contient trois éléments, le deuxième un élément et le troisième deux éléments.

– Cas 2 : le nombre de manières de placer n objets identiques dans k ensembles distincts en sachant que dans ce cas-ci, un ensemble **peut être vide**, est égal à $\binom{n+k-1}{k-1}$.
En effet, dans ce second cas les étoiles et les barres sont considérés comme des objets : ils sont donc au nombre de $n+k-1$.
Parmi ces $n+k-1$ objets, k sont des barres, il y a donc bien $\binom{n+k-1}{k-1}$ manières de représenter la situation.

De même que pour le cas 1, réalisons un dessin afin de mieux comprendre la situation.
Considérons les valeurs $n = 7$ et $k = 6$. Alors une représentation possible est :

$\star \mid \star\star \mid \mid \star \mid \star\star\star \mid$

Dans cet exemple, le premier ensemble contient un élément, le deuxième deux éléments, le troisième aucun élément, le quatrième un élément, le cinquième trois éléments et enfin le dernier ne contient aucun élément.
Nous avons donc dans cet exemple deux ensembles vides, ce qui ne peut pas arriver dans le cas 1.

Exemple d'application du principe Stars and Bars

Considérons le cas d'un investisseur qui souhaite investir 15000 €. Il lui est proposé 5 différents actifs pour réaliser son investissement. À chaque fois qu'il investit sur un actif, il doit investir une somme qui est un multiple de 1000.
Combien de stratégies d'investissement différentes peut-il établir ?

Solution : ce problème est une application directe du principe Stars and Bars avec 15 étoiles et 5 barres.
On a considéré dans ce cas que l'investisseur pouvait choisir de ne pas investir sur un actif, on est donc dans la situation du cas 2 où un ensemble peut être vide. Ainsi la formule Stars and Bars nous permet de conclure que cet investisseur dispose de $\binom{15+5-1}{5-1} = \binom{19}{4} = 3876$ stratégies d'investissement différentes.

NB : bien que la formule Stars and Bars ne soit pas au programme de classe préparatoire, sa connaissance et surtout la manière de voir le problème de dénombrement lié à ce principe Bars and Stars en font un outil qu'il est intéressant d'avoir vu.

2 Tribu

Soit Ω un ensemble non vide.
Soit $\mathcal{T}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors on dit que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω lorsque les trois points suivants sont vérifiés :
– $\Omega \in \mathcal{T}$
– $\forall A \in \mathcal{T},\ \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$
– $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

2.1 Propriétés sur les tribus

Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω alors :
– $\emptyset \in \mathcal{T}$ (en effet $\emptyset = \bar{\Omega}$)
– si I est fini ou dénombrable et si $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$ alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$ et $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

Ces propositions découlent directement de la définition d'une tribu.
– Une intersection de tribus sur un ensemble Ω est une tribu sur Ω.
– Si A est une partie quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) qui contient A. Elle s'appelle la tribu engendrée par A.

3 Espace probabilisable

Si Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé espace probabilisable et les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les événements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.

3.1 Probabilité sur un espace probabilisable

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.
Soit $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les deux axiomes suivants :
– $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
– soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ tel que si $n \neq m$ alors $A_n \cap A_m = \emptyset$ (ensembles deux à deux disjoints) alors on a :
$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$
Alors $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ alors $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

3.2 Propriétés élémentaires d'une probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Alors la probabilité $\mathbb{P}$ vérifie les propriétés élémentaires suivantes :

– $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
– si A et B sont des éléments de la tribu $\mathcal{T}$ tels que $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
Autrement dit, $\mathbb{P}$ est une fonction croissante de $(\mathcal{T}, \subset)$ vers $[0,1]$.
– si A et B sont des éléments de la tribu $\mathcal{T}$ alors :
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
En particulier si $A \cap B = \emptyset$ (on dit alors que les événements A et B sont incompatibles) alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
Il est également important de retenir que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. – si $(A_i)_{i \in I}$ est un ensemble (potentiellement infini) d'événements alors :
$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) \leq \sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ où le terme de droite est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

N.B : il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles.

3.3 Théorème de continuité croissante/décroissante

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements croissante (respectivement décroissante) pour l'inclusion alors :
$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = \underset{n \in \mathbb{N}}{sup}\, \mathbb{P}(A_n)$
(respectivement $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = \underset{n \in \mathbb{N}}{inf}\, \mathbb{P}(A_n)$).

3.4 Événements négligeables et presque sûrs

Soit A un événement de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On dit que A est négligeable lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.
On dit que A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

– Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.
– Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.
– Tout événement inclus dans un événement négligeable est négligeable.
– Tout événement contenant un événement presque sûr est presque sûr.