

CALCUL NUMÉRIQUE

1. Pour s'échauffer

A1 Voici les résultats de 6 participantes de la Parisienne 2023 sur le parcours 10 km ou 7 km .

Participant	Temps	Distance (km)
Carole	0 : 41 : 23	10
Camille	0 : 47 : 58	10
Fabienne	0 : 33 : 17	7
Estelle	0 : 44 : 30	7
Claire	1 : 04 : 15	10
Iris	0 : 45 : 25	7

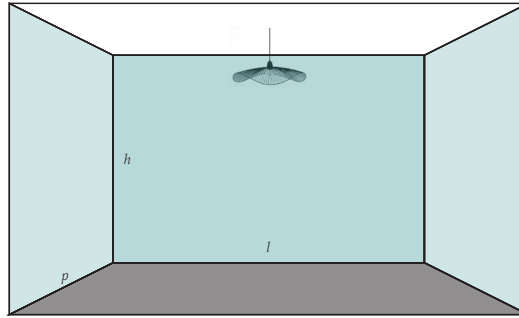
On souhaite calculer la vitesse moyenne en km/h et le temps en minutes au kilomètre de chacune des participantes. Écrire deux fonctions en Python qui permettent d'automatiser chacun de ces calculs.

A2 Une **année-lumière** est une unité de distance couramment utilisée en astronomie, définie comme la distance parcourue par la lumière en une année, soit 365,25 jours.

1. La vitesse de la lumière étant environ égale à 299 792 km par seconde, écrire une fonction qui reçoit un nombre d'années-lumière et renvoie le nombre de kilomètres que cela représente.
2. L'étoile la plus proche de la Terre est « Proxima du Centaure ». Elle est située à une distance de la Terre de 4,3 années-lumière. En déduire la distance en km.

3. La planète Mars est située en moyenne à 56×10^6 km de la Terre. Sachant que la fusée SpaceX peut se déplacer à une vitesse de 5400 km/h, calculer le nombre de jours nécessaire pour atteindre Mars.
4. Une **unité astronomique** est la distance moyenne de la Terre au Soleil, soit 1 U.A. $\approx 1,496 \times 10^8$ km. La distance entre le soleil et Jupiter est environ 778 millions de kilomètres. Déterminer cette distance en U.A. Vérifier la réponse à l'aide d'une fonction Python.

A3 Un magasin de bricolage propose une application pour calculer le nombre de pots de peinture nécessaires pour repeindre les 4 murs d'une pièce dont on connaît les dimensions l , p et h exprimées en mètres et sachant que l'un des murs comporte une fenêtre à 2 vantaux de largeur 1270 mm et de hauteur 1370 mm ainsi qu'une porte de 90 cm de large et 2 mètres de haut.



1. Exprimer la surface S des 4 murs latéraux de la pièce qui seront peints en tenant compte de la fenêtre.
2. Écrire une fonction qui reçoit les dimensions de la pièce en mètres, calcule et renvoie le nombre de pots de peinture nécessaires, sachant que sur le pot de peinture, on peut lire :

Aspect	Satin
Conditionnement (en L)	2.5
Type de peinture	Peinture acrylique
Nettoyage des outils	Eau
Rendement	$10\text{m}^2/\text{L}$
Temps séchage complet (en h)	24
Séchage entre 2 couches (en h)	6
Classe COV qualité de l'air	A+
Nombre de COV (en g/L)	5
COV (mg/m^3 d'air) Norme EN717-1	Inférieur à 1000

3. Cette application propose d'adapter le calcul si on souhaite peindre le plafond. Modifier la fonction précédente pour obtenir cela.

A4 *Éléonore et Fabienne se préparent pour le semi-marathon de Lisbonne. Pour cela, elles souhaitent calculer leur VMA. La VMA (Vitesse Maximale Aérobie) calculée en km/h, est un indicateur qui correspond à la vitesse de course à partir de laquelle la consommation d'oxygène maximale (VO₂max) est atteinte. Le test demi-Cooper est le test de calcul VMA le plus utilisé, car il est réalisé sur un temps court et sans avoir besoin de matériel. Il consiste à parcourir la plus grande distance possible sur un temps donné de 6 minutes.*

1. Créer une fonction en Python qui renvoie la VMA correspondant à une distance d entrée et donnée en mètres pour le test demi-Cooper.
2. En 6 minutes, Éléonore a parcouru 1120 mètres et Fabienne 1260 mètres. Donner leur VMA respective.
3. À l'aide de la fonction créée, compléter le tableau indiquant dans la première ligne la VMA et dans la deuxième ligne la distance parcourue en mètres pendant les 6 minutes.

VMA												
distance d	1330	1260	1190	1120	1050	980	910	840	770	700	630	560

4. Pour un entraînement à un semi marathon, la VMA moyenne conseillée est 85% de la VMA. À quelle vitesse doivent courir Éléonore et Fabienne pour suivre ce conseil ?
5. Créer une fonction ayant pour paramètres le % de VMA souhaité, la VMA et la durée t en minutes, qui renvoie la distance parcourue en km.
6. Lucie a une VMA de 12 km/h. Elle souhaite courir pendant 10 minutes à 70% VMA, quelle distance doit-elle parcourir ? Sachant que le stade a une piste ayant une longueur de 250 m, combien de tours doit-elle faire environ ?
7. Jeanne a une VMA de 14 km/h. Elle souhaite courir 5 minutes à 70% VMA puis 3 minutes à 90% VMA et enfin finir avec 3 minutes à 60% VMA. Quelle distance aura-t-elle parcourue ?

A5 *Un loueur de véhicules propose la location d'une camionnette au tarif de 46€ la journée pour un forfait de 200 km. Les kilomètres supplémentaires sont facturés 14 centimes du kilomètre. Réaliser une fonction qui reçoit le nombre de kilomètres parcourus et qui renvoie le prix T.T.C. en euros à payer par le client, sachant que les prix affichés sont H.T. et que la T.V.A. s'élève à 20%.*

2. Jouons avec les entiers

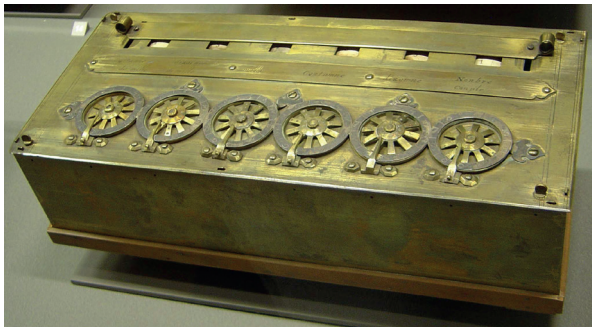
A6

1. Écrire une fonction mettant en jeu un test qui reçoit un entier naturel et renvoie 1 si celui-ci est multiple de 3 et 0 sinon.
2. Par un programme de calcul, créer une fonction répondant à la question précédente, sans utiliser l'instruction `if`.

A7

Pour effectuer une division euclidienne avec la Pascaline (l'ancêtre de la calculatrice), il fallait procéder par soustractions successives. Ainsi pour faire la division de 2023 par 120, on cherchait combien de fois successives on pouvait mettre 120 dans 2023 et on effectuait donc : $2023 - 120 - 120 \dots$ jusqu'à arriver à un nombre inférieur à 120.

1. Créer une fonction qui reçoit deux entiers naturels a et b ($b \neq 0$) et qui effectue les soustractions successives de b à a tant que le résultat est supérieur à b et renvoie le nombre de fois que l'on a soustrait b .
2. En déduire le nombre de soustractions possibles de 120 à 2023.
3. À quelle opération correspond cette démarche ? Justifier.
4. En s'inspirant de la fonction précédente, créer une nouvelle fonction qui affiche si un entier a est un multiple d'un entier b .
5. De la même manière, créer une fonction qui renvoie le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a .



La Pascaline au musée des arts et métiers - Source Wikipédia

A8 On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre entier.
- Lui retirer 6
- Multiplier le résultat par le nombre de départ.
- Ajouter 9

1. Écrire une fonction qui reçoit l'entier choisi en paramètre, réalise ce programme de calcul et renvoie le résultat.
2. Des élèves ont testé cette fonction et proposent quelques conjectures :
 - a. Le résultat ne se termine jamais par 7.
 - b. Si n est pair, le résultat est impair et inversement.
 - c. Le résultat est toujours positif ou nul.
 - d. Quand le nombre est multiple de 6, le résultat est multiple de 9.
 - e. Le résultat est un carré parfait.
 - f. Quand le nombre se termine par un 9, le résultat se termine par un 6.

L'une de ces 6 conjectures est fausse, la trouver et démontrer les autres.

A9 [La numération dans différentes bases]

1. Pour convertir un nombre entier n en écriture binaire, on peut utiliser la fonction `bin` : elle reçoit un entier et renvoie une chaîne de caractères commençant par `'0b'` représentant ce nombre en base 2. Créer une fonction qui reçoit un nombre entier et qui renvoie sous forme d'une chaîne l'écriture en base 2 de cet entier. Par exemple :

```
>>> binaire(6)
'110'
```

2. Que permet d'afficher la ligne suivante ?

```
print(int('110010', 2))
```

3. Écrire dans le système décimal, les nombres exprimés dans les bases suivantes, puis vérifier les réponses à l'aide d'un programme sur Python :
 - a. Le nombre qui s'écrit **4444** en base 5
 - b. Le nombre qui s'écrit **210210** en base 3
 - c. Le nombre qui s'écrit **3450** en base 7
 - d. Le nombre qui s'écrit **110011001** en base 2
4. Que dire des nombres qui se terminent par 0 en base n ?

3. Programmes de calculs

A10 On considère l'algorithme suivant :

```
FONCTION Jeu(x) :  
  a ← x + 2  
  b ← a2  
  c ← (a + 2) × (a - 2)  
  SI b < c ALORS :  
    | RENVOYER "Gagné"  
  SINON :  
    | RENVOYER "Perdu"  
FIN FONCTION
```

1. Programmer cet algorithme en Python.
2. Prendre différentes valeurs pour x . Que peut-on conjecturer ?
3. Prouver cette conjecture.

A11 Que renvoie la fonction suivante lorsqu'on lui donne en arguments des valeurs entières pour n et d ?

```
def trouve(n, d):  
    pas = 1  
    x = 0  
    for i in range(d+1):  
        while x ** 2 <= n:  
            x = x + pas  
        x = x - pas  
        print("Entre", round(x, i), "et", round(x+pas, i))  
        pas = pas / 10  
    return x
```

A12 Voici ci-dessous la déclaration d'une fonction `iota` en Python définie sur l'ensemble des nombres entiers :

```
def iota(x) :  
    s = x  
    for i in range(2*x, 5*x) :  
        s = s + i//x  
        print(s)  
    return s
```

1. Existe-il une ou plusieurs valeurs de x pour lesquelles la fonction `iota(x)` ne peut être calculée ?

2. Recopier cette fonction et écrire un programme qui affiche les valeurs de `iota(n)` pour n entier de l'intervalle $[-5; 5]$. Que peut-on conjecturer ?
3. Démontrer cette conjecture.

A13 Résolution d'une équation de type $f(x) = 0$.

1. Écrire une fonction qui reçoit un nombre x et renvoie un booléen indiquant si ce nombre est solution ou non de l'équation $x^3 - 4x = 0$. En résolvant cette équation dans \mathbb{R} , tester la fonction créée (il y a 3 solutions!).

Plus généralement, on souhaite résoudre des équations de la forme $f(x) = 0$ pour différentes fonctions f .

2. Compléter la fonction Python `tableau`. Elle reçoit en paramètres une fonction, la première et la dernière valeur du tableau et affiche 11 valeurs du tableau réparties avec un pas constant en arrondissant les images au millième :

```
>>> tableau(f1, 3, 4)
x          f(x)
-----
3.0         9.0
3.1         9.61
3.2        10.24
3.3        10.89
3.4        11.56
3.5        12.25
3.6        12.96
3.7        13.69
3.8        14.44
3.9        15.21
4.0        16.0
```

```
def f1(x):
    return x**2

def f2(x):
    return 6*x + 3

def tableau(f, debut, fin):
    pas = (fin-debut) / .....
    print("x \t f(x)")
    print("-----")
    for i in range(.....):
        x = ..... + ..... * i
        print(round(x, .....), "\t", round(f(x), .....))
```



Quelques remarques sur le code précédent :

- Vous aurez remarqué qu'une fonction peut à son tour être paramètre d'une autre fonction. C'est le principe de **pleine fonctionnalité** d'un langage.
- Le caractère spécial `"\t"` permet de réaliser un "saut de colonne" dans l'affichage et ainsi d'aligner les résultats.

3. Dédurre de la fonction précédente les solutions des équations suivantes arrondies au centième près dans l'intervalle $[-3; 3]$:

a. $2x^2 - 6x + 3 = 0$

b. $8x^3 + 14x^2 - 2x = 0$

Pour vérifier, retrouver alors les valeurs exactes des résultats par le calcul.

A14 Voici un algorithme un peu surprenant qui crée une liste ininterrompue de nombres en partant d'une liste de 3 nombres strictement positifs et en respectant toujours la règle suivante :

- Noter les trois derniers nombres
- Effectuer le produit des deux derniers éléments
- Ajouter 1
- Diviser ensuite par le premier des trois nombres
- Mettre le résultat à la fin de la liste précédente
- Puis recommencer ...

1. On suppose que la liste contient au départ les nombres : 3, 4 et 5.

a. Vérifier que le nombre suivant obtenu avec cet algorithme est 7.

b. Programmer une fonction *suisvant* qui reçoit une liste d'au moins 3 nombres et renvoie le nombre suivant obtenu par l'algorithme.

2. a. Créer une fonction *suite(L, n)* qui reçoit une liste de départ et renvoie une liste de longueur *n* selon l'algorithme présenté.

b. Donner les 10 premiers nombres obtenus en partant de la liste initiale (3,4,5).

3. On choisit maintenant comme liste initiale (1,2,3).

a. Donner les 10 premiers nombres obtenus.

b. Quelle conjecture peut-on réaliser sur l'ensemble des valeurs obtenues ?

4. Aaaaah! Des racines !

A15 Pour x et y deux nombres positifs, on peut définir différentes moyennes :